

UNIVERSITY OF HAWAII  
LIBRARY  
ARCHIVE  
for  
AUG 28 '59

# RATIONAL MECHANICS *and* ANALYSIS

*Edited by*

C. TRUESDELL

Volume 3, Number 3



SPRINGER-VERLAG  
BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG  
(Postverlagsort Berlin · 22.6. 1959)

*Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quae per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus.*

NEWTON

*La généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouir nos lumières, nous décoverra plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité.*

EULER

*Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche ...*

LAGRANGE

---

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

Each memoir must meet a standard of rigor set by the best work in its field. Contributions must consist largely in original research; on occasion, an expository paper may be invited.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive. Authors are urged to write clearly and well, avoiding an excessively condensed or crabbed style.

Manuscripts intended for the Archive should be submitted to an appropriate member of the Editorial Board.

---

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume. Subscriptions may be entered through any agent. The price is DM 96.— per volume.

Notice is hereby given that for all articles published exclusive rights in all languages and countries rest with Springer-Verlag. Without express permission of Springer-Verlag, no reproduction of any kind is allowed.

For each paper 75 offprints are provided free of charge.

# Der Resonanzbegriff bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

RUDOLF IGLISCH

Vorgelegt von L. COLLATZ

## § 1. Problemstellung, Hauptergebnisse

In der Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + a(t) y' + b(t) y = f(t)$$

mögen alle drei Koeffizientenfunktionen die gleiche — nicht notwendig kleinste — Periode  $P$  besitzen:

$$(2) \quad a(t+P) = a(t), \quad b(t+P) = b(t), \quad f(t+P) = f(t).$$

Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$(3) \quad \varphi'' + a(t) \varphi' + b(t) \varphi = 0.$$

Man setze

$$(4) \quad \varphi(t) = \exp \left( \int^t a(s) ds \right), \quad \text{also} \quad \varphi' - a\varphi = 0.$$

Dann verifiziert man unmittelbar durch Rechnung, daß die Funktion

$$(5) \quad z(t) = \varphi(t) \varphi(t)$$

der sog. zu (3) adjungierten Gleichung

$$(6) \quad z'' - a(t) z' + (b(t) - a'(t)) z = 0$$

genügt. Obwohl in der vorliegenden Note unmittelbar weiter nichts davon gebraucht wird, soll in § 2 der Zusammenhang der mit  $P$  periodischen Lösungen von (3) und (6) näher untersucht werden aus folgenden beiden Gründen: Erstens werden die dabei zu benutzenden Schlußweisen auch späterhin wiederkehren; zweitens werden die Ergebnisse in einer anschließenden Arbeit benötigt, die dem Resonanzbegriff der zu (1) entsprechenden nichtlinearen Differentialgleichung gewidmet ist. Der kundige Leser wird die Resultate dieses Paragraphen unschwer in einen umfassenderen Rahmen einordnen können.

**Definition 1.** Bei der inhomogenen Differentialgleichung (1) liegt der *Resonanzfall* vor, wenn die adjungierte homogene Gleichung (6) eine mit  $P$  periodische Lösung

$$(7) \quad z(t) = \varphi(t) \varphi(t) = \varphi(t+P) \varphi(t+P) = z(t+P)$$

besitzt, für die

$$(8) \quad \int_0^P p(t) \varphi(t) f(t) dt = C \neq 0$$

ausfällt.

Dann ist nach (2) auch  $a(t)z(t)$  mit  $P$  periodisch, also infolge (4) auch  $p'(t)\varphi(t)$ , von selbst natürlich  $z'(t) = (p(t)\varphi(t))'$ . Daher gilt wegen  $p\varphi' = (p\varphi)' - p'\varphi$

$$(9) \quad p(t+P)\varphi'(t+P) = p(t)\varphi'(t).$$

In § 3 wird dieser Resonanzfall untersucht. Das Ergebnis läßt sich zusammenfassen in

**Satz 1.** *Im Resonanzfall nimmt jede Lösung  $y(t)$  von (1) — unabhängig von den Anfangswerten — mit unbeschränkt wachsendem  $t$  beliebig große Werte an, u.zw. wachsen diese Ausschläge im wesentlichen mindestens linear mit  $t$  über alle Grenzen (vgl. dazu Satz 5).*

**Definition 2.** Bei (1) liegt der *Hauptfall* vor, wenn (6) keine mit  $P$  periodische Lösung  $z(t)$  besitzt.

In § 4 erhält man

**Satz 2.** *Im Hauptfall gibt es für alle Werte von  $t$  beschränkt bleibende Lösungen  $y(t)$  von (1), z.B. die eindeutig existierende mit  $P$  periodische Lösung.*

**Definition 3.** Bei (1) liegt der *Ausnahmefall* vor, wenn zwar (6) mit  $P$  periodische Lösungen (5) besitzt, wenn jedoch für alle diese periodischen Lösungen

$$(10) \quad \int_0^P p(t) \varphi(t) f(t) dt = 0$$

gilt.

In § 5 wird gezeigt:

**Satz 3.** *Auch im Ausnahmefall gibt es für alle Werte von  $t$  beschränkt bleibende Lösungen, z.B. die mit  $P$  periodischen, die aber jetzt eine ein- oder zweiparametrische Schar bilden.*

Im Falle konstanter Koeffizienten auf der linken Seite von (1) läßt sich diese Gleichung — unter Heranziehung der Fourier-Entwicklung von  $f(t)$  — explizit lösen. Die hier aufgestellten Sätze finden ihre Bestätigung.

Es sei noch bemerkt, daß bei den nachfolgend durchgeföhrten Abschätzungen kein Wert darauf gelegt wurde, jeweils die besten Schranken aufzusuchen.

## § 2. Die periodischen Lösungen der homogenen und der adjungierten Gleichung

Bewiesen werden soll folgender

**Satz 4.** *Besitzt die homogene Gleichung (3) eine mit  $P$  periodische Lösung  $\varphi_1(t)$  und ist  $\varphi_2(t)$  davon unabhängige Lösung von (3), so gibt es ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmtes*

$$(11) \quad \varphi(t) = \varkappa \varphi_1(t) + \lambda \varphi_2(t)$$

derart, daß

$$(12) \quad z(t+P) = p(t+P) \varphi(t+P) = p(t) \varphi(t) = z(t)$$

mit  $P$  periodische Lösung der adjungierten Gleichung (6) ist, falls  $\varphi_2(t)$  nicht die Periode  $P$  besitzt. Ist  $\varphi_2(t)$  auch mit  $P$  periodisch, so sind alle Funktionen  $z(t)$  aus (5) mit  $P$  periodisch.

Zum Beweise multiplizieren wir die aus (3) mit  $\varphi(t)$  bzw.  $\varphi_1(t)$  gebildete Lagrangesche Identität mit  $p(t)$ :

$$p(\varphi'' \varphi_1 - \varphi \varphi_1'') + a p(\varphi' \varphi_1 - \varphi \varphi_1') = 0,$$

integrieren sie zwischen  $t$  und  $t+P$ , wenden auf das erste Integral partielle Integration an und beachten die zweite Beziehung (4). Dann erscheint

$$(13) \quad (p \varphi_1 \varphi' - p \varphi \varphi_1')|_{t}^{t+P} = 0$$

oder mit Benutzung der Periodizität von  $\varphi_1(t)$ :

$$(14) \quad \varphi_1(t) [p(t+P) \varphi'(t+P) - p(t) \varphi'(t)] - \varphi_1'(t) [p(t+P) \varphi(t+P) - p(t) \varphi(t)] = 0.$$

Nun sei  $t_1$  eine — sicher existierende — Stelle, an der

$$(15) \quad \varphi'(t_1) = 0$$

erfüllt ist, demnach  $\varphi(t_1) \neq 0$ . Aus (14) wird

$$(16) \quad p(t_1+P) \varphi'(t_1+P) = p(t_1) \varphi'(t_1).$$

Dieser Beziehung genügen sämtliche Lösungen  $\varphi(t)$  von (3). Jetzt soll durch passende Wahl von  $\alpha$  und  $\lambda$  in (11) zusätzlich die Gleichung

$$(17) \quad p(t_1+P) \varphi(t_1+P) = p(t_1) \varphi(t_1)$$

erfüllt werden. Das liefert für  $\alpha$  und  $\lambda$  nach Eintragen von (11) die Beziehung

$$(18) \quad [p(t_1+P) - p(t_1)] \varphi_1(t_1) \alpha + [p(t_1+P) \varphi_2(t_1+P) - p(t_1) \varphi_2(t_1)] \lambda = 0.$$

**Fall I.** Ist

$$p(t_1+P) - p(t_1) \neq 0,$$

so lässt sich aus (18) zu vorgegebenem  $\lambda$  eindeutig  $\alpha$  berechnen, es gibt also eine bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte Funktion  $\varphi(t)$ , die (17) befriedigt. —  $\varphi_2(t)$  ist übrigens in diesem Fall nicht mit  $P$  periodisch; denn bei gegenteiliger Annahme würde aus (14) mit  $\varphi_2(t)$  statt  $\varphi(t)$  für  $t=t_1$  wegen (15) folgen

$$\varphi_1(t_1) \varphi_2'(t_1) [p(t_1+P) - p(t_1)] = 0,$$

während alle drei Faktoren von Null verschieden sind.

**Fall II.** Ist

$$p(t_1+P) - p(t_1) = 0, \quad \text{damit aus (4) allgemein } p(t+P) = p(t),$$

so vereinfacht sich (18) unter Beachtung von  $p(t_1) \neq 0$  zu

$$\lambda [\varphi_2(t_1+P) - \varphi_2(t_1)] = 0.$$

a) Ist  $\varphi_2(t_1 + P) \neq \varphi_2(t_1)$ , mithin  $\varphi_2(t)$  nicht mit  $P$  periodisch, so erhält man  $\lambda = 0$ ,  $\varkappa$  beliebig;  $\varphi(t)$  ist wieder bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.

b) Ist

$$(19) \quad \varphi_2(t_1 + P) = \varphi_2(t_1),$$

so sind  $\varkappa$  und  $\lambda$  beide willkürlich. Aus (14) mit  $\varphi_2(t)$  statt  $\varphi(t)$  folgt in diesem Falle

$$(20) \quad \varphi'_2(t_1 + P) = \varphi'_2(t_1).$$

Daher besitzt nach (1), (2), (19) und (20) auch  $\varphi_2(t)$  die Periode  $P$ ; damit ist nach (11) jede Lösung  $\varphi(t)$  von (3) mit  $P$  periodisch. Es gilt also folgendes

*Zwischenresultat.* Ist nur  $\varphi_1(t)$  mit  $P$  periodisch, so ist  $\varphi(t)$  durch (17) bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt; sind  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  beide mit  $P$  periodisch, so genügt jedes  $\varphi(t)$  aus (11) der Beziehung (17).

Jedes der Gleichung (17) genügende  $\varphi(t)$  liefert nun nach (5) ein  $z(t)$  mit

$$(21) \quad z(t_1 + P) = z(t_1).$$

Aus

$$z'(t) = p(t) \varphi'(t) + p'(t) \varphi(t) = p(t) [\varphi'(t) + a(t) \varphi(t)]$$

kommt unter Beachtung von (16)

$$(22) \quad z'(t_1 + P) = z'(t_1).$$

Nach (2), (6), (21) und (22) ist mithin dieses  $z(t)$  mit  $P$  periodisch. — Jetzt folgt Satz 4 unmittelbar aus dem Zwischenresultat.

*Zusätze.* I. Die mit  $P$  periodischen Lösungen von (3) und (6) haben die gleiche Zahl von Parametern. — Geht man nämlich von einer mit  $P$  periodischen Lösung  $z_1(t)$  von (6) aus, so liefert die gleiche Überlegung eine mit  $P$  periodische Funktion

$$z_1(t) \cdot \exp(-\int a(t) dt) = p(t) \varphi(t) \exp(-\int a(t) dt) = \varphi(t).$$

II. Stets ist  $a(t) = p'(t)/p(t)$  mit  $p(t) > 0$ , also (3) selbstadjungiert, wenn man mit  $p(t)$  hinaufmultipliziert. Aber: Dann und nur dann hat diese selbstadjungierte Gleichung lauter mit  $P$  periodische Koeffizienten, wenn  $p(t)$  mit  $P$  periodisch ist.

III. (3) und (6) können höchstens dann eine zweiparametrische mit  $P$  periodische Lösungsschar besitzen, wenn  $p(t)$  mit  $P$  periodisch ist.

Zwei Beispiele mögen den Sachverhalt erläutern.

*Erstes Beispiel.* Die Gleichung

$$[(a + b \cos t) \varphi']' + c \sin t \varphi' + [a + (2b - c) \cos t] \varphi = 0$$

hat eine Lösung

$$\varphi_1(t) = \sin t.$$

Damit der Faktor von  $\varphi''$  positiv ist, sorge man für  $a > |b|$ . Man errechnet in üblicher Weise

$$\varphi_2(t) = C \cdot \sin t \cdot \int^t \frac{(a + b \cos t)^{\frac{c-b}{b}}}{\sin^2 t} dt.$$

Das Integral läßt sich bei ganzzahligem Zählerexponenten elementar berechnen. Man erhält z.B. mit willkürlichem  $\alpha$

$$\begin{aligned} \text{für } c = b & \quad \varphi_2(t) = \alpha \cos t, \\ \text{für } c = 2b & \quad \varphi_2(t) = \alpha [a \cos t + b], \\ \text{für } c = 3b & \quad \varphi_2(t) = \alpha [(a^2 + b^2) \cos t + 2ab + b^2 t]. \end{aligned}$$

In den ersten beiden Fällen ist  $\varphi_2(t)$  wie  $\varphi_1(t)$  mit  $2\pi$  periodisch, im dritten nicht, falls  $b \neq 0$  ist. In jedem Fall besitzt dagegen  $p(t)$  die Periode  $2\pi$ ; denn man errechnet

$$p(t) = \exp \left[ \int \frac{(c-b) \sin t}{a+b \cos t} dt \right] = \frac{1}{(a+b \cos t)^{\frac{c}{b}-1}}.$$

*Zweites Beispiel.* Jetzt ein Beispiel für den Fall einer nichtperiodischen Funktion  $p(t)$ . Die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \alpha + \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right) \cos t \right] \varphi' \right\}' + \\ & + \left[ \left( 2\gamma \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} - 1 - \beta^2 \right) \sin t + \frac{\gamma-\alpha}{\beta} \right] \varphi' + [\gamma - (1 + \beta^2) \cos t] \varphi = 0, \end{aligned}$$

wo die erste eckige Klammer dauernd positiv gemacht werden kann, hat die mit  $2\pi$  periodische Lösung

$$\varphi_1(t) = \beta \cos t + \sin t + \frac{\gamma-\alpha}{\beta}.$$

Man rechnet

$$p(t) = \exp \left[ \gamma \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \int \frac{\sin t dt}{\alpha + \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right) \cos t} \right] \cdot \exp \left[ \frac{\gamma-\alpha}{\beta} \int \frac{dt}{\alpha + \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right) \cos t} \right].$$

Der erste Faktor ist mit  $2\pi$  periodisch, der zweite nicht. Beide Integrale lassen sich elementar auswerten. Man erhält

$$\begin{aligned} p(t) = & \left[ \alpha + \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right) \cos t \right]^{\frac{\gamma(\gamma-\alpha)}{(1+\beta^2)\beta^2-\gamma(\gamma-\alpha)}} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{2 \frac{\gamma-\alpha}{\beta}}{\sqrt{\alpha^2 - \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right)^2}} \operatorname{arc tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha - \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right)}{\alpha + \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta^2} \gamma - 1 - \beta^2 \right)}} \cdot \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß man an den Unendlichkeitsstellen des Arguments des  $\operatorname{arc tg}$  immer weiterwachsend auf den folgenden Ast des  $\operatorname{arc tg}$  übergehen muß. —  $\varphi_2(t)$  kann nicht mit  $2\pi$  periodisch sein, man braucht es nicht erst zu rechnen.

### § 3. Der Resonanzfall

Die adjugierte homogene Gleichung (6) habe eine mit  $P$  periodische Lösung (5), für die (8) gilt. Im Gegensatz zur Aussage des Satzes 1 sei die Existenz einer Lösung  $y(t)$  von (1) angenommen, die für alle Werte von  $t$  beschränkt bleibt, für die also etwa

$$(23) \quad |y(t)| \leq E$$

gilt. Wendet man auf die aus (1) und (3) gebildete Lagrangesche Identität die gleichen Schlüsse an wie in § 2, so erhält man analog zu (13), wenn diesmal über ein Intervall der Länge  $n \cdot P$  integriert wird, die Beziehung

$$(24) \quad [\dot{p} y' \varphi - \dot{p} \varphi' y]_t^{t+nP} = \int_t^{t+nP} \dot{p}(t) \varphi(t) f(t) dt$$

oder unter Beachtung der Periodizität von  $\dot{p}(t) \varphi(t)$  und der Gleichungen (8) und (9)

$$(25) \quad \dot{p}(t) \varphi(t) [y'(t+nP) - y'(t)] - \dot{p}(t) \varphi'(t) [y(t+nP) - y(t)] = nC.$$

Wegen der Periodizität sind die Faktoren vor den eckigen Klammern beschränkt, also etwa

$$(26) \quad |\dot{p}(t) \varphi(t)| \leq D, \quad |\dot{p}(t) \varphi'(t)| \leq M.$$

Aus (25) kommt dann folgende Abschätzung für den ersten Summanden:

$$(27) \quad D |y'(t+nP) - y'(t)| \geq n |C| - 2ME,$$

wobei die Annahme (23) beachtet wurde. Integriert man (27) zwischen  $t$  und  $t+1$  und benutzt noch einmal (23), so erscheint

$$(28) \quad \begin{aligned} 4DE &\geq n |C| - 2ME, \\ 2E[2D+M] &\geq n |C|, \\ E &\geq \frac{n |C|}{2[2D+M]}. \end{aligned}$$

Da  $n$  beliebig groß angenommen werden kann, ist dies ein Widerspruch gegen (23). Man kann das Ergebnis auch so aussprechen:

**Satz 5.** *Im Resonanzfall gibt es für jede Lösung  $y(t)$  von (1) in jedem Intervall*

$$(29) \quad \bar{t} \leqq t \leqq \bar{t} + nP + 1$$

*mindestens eine Stelle  $t^*$ , für die*

$$(30) \quad |y(t^*)| \geq \frac{n |C|}{2[2D+M]}$$

*ausfällt.* — Damit ist Satz 1 in vollem Umfang bewiesen.

#### § 4. Der Hauptfall

Die homogene adjungierte Gleichung (6) habe keine mit  $P$  periodische Lösung  $z(t)$ . Entsprechend Satz 2 ist zu beweisen, daß (1) eine mit  $P$  periodische Partikularlösung hat. Dies ist ein einfaches und allgemein bekanntes Resultat; es sei aber doch erlaubt, hier einen Beweis im Rahmen der bisher benutzten Schlußweisen anzuführen.

Zunächst sei einmal die Existenz einer mit  $P$  periodischen Lösung  $y(t)$  von (1) angenommen. Aus (24) folgt dann mit  $n=1$

$$(31) \quad \begin{aligned} y'(t) [\dot{p}(t+P) \varphi_v(t+P) - \dot{p}(t) \varphi_v(t)] - y(t) [\dot{p}(t+P) \varphi'_v(t+P) - \dot{p}(t) \varphi'_v(t)] \\ = \int_t^{t+P} \dot{p}(t) \varphi_v(t) f(t) dt \end{aligned}$$

für  $\nu = 1, 2$ . Die Koeffizientendeterminante  $D(t)$  dieses Gleichungssystems für  $y'(t)$  und  $-y(t)$  ist unter Berücksichtigung der zweiten Beziehung (4) und  $\dot{p}\varphi'_\nu = (\dot{p}\varphi_\nu)' - \dot{p}'\varphi_\nu = (\dot{p}\varphi_\nu)' - a\dot{p}\varphi_\nu$ , ferner der ersten Gleichung (2) sowie (5)

$$(32) \quad D(t) = \begin{vmatrix} z_1(t+P) - z_1(t) & z'_1(t+P) - z'_1(t) \\ z_2(t+P) - z_2(t) & z'_2(t+P) - z'_2(t) \end{vmatrix}.$$

Später wird gezeigt werden, daß

$$(33) \quad D(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t$$

gilt.

Jetzt soll die mit  $P$  periodische Lösung  $y(t)$  von (1) konstruiert werden. Man rechne dazu aus (31) für einen speziellen Wert  $t^*$  die Anfangswerte  $y(t^*)$  und  $y'(t^*)$  aus, die eine etwa vorhandene mit  $P$  periodische Lösung  $y(t)$  haben müßte. Mit diesen Anfangswerten bestimme man  $y(t)$  aus (1). Es ist zu zeigen: Dieses  $y(t)$  ist von selbst mit  $P$  periodisch, d.h. es gilt von selbst

$$(34) \quad y(t^* + P) = y(t^*) \quad \text{und} \quad y'(t^* + P) = y'(t^*).$$

Aus (1) und (2) folgt dann ja die behauptete Periodizität.

Zum Beweise subtrahiere man (31) für  $t = t^*$  von (24) mit  $n = 1$  und gleichfalls  $t = t^*$ :

$$(35) \quad \begin{aligned} & \dot{p}(t^* + P)\varphi_\nu(t^* + P)[y'(t^* + P) - y'(t^*)] - \\ & - \dot{p}(t^* + P)\varphi'_\nu(t^* + P)[y(t^* + P) - y(t^*)] = 0. \end{aligned}$$

Setzt man

$$(36) \quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & -z'_1(t) \\ z_2(t) & -z'_2(t) \end{vmatrix},$$

so ist (35) für  $\nu = 1, 2$  ein lineares homogenes Gleichungssystem für die beiden eckigen Klammern mit der Koeffizientendeterminante  $\Delta(t^* + P)$ , wie man mit Hilfe der gleichen Umformung feststellt, die (32) als Koeffizientendeterminante von (31) lieferte. Bekanntlich ist aber  $\Delta(t) \neq 0$  für alle  $t$ . (Der Beweis der Tatsache läuft übrigens ganz analog dem gleich durchzuführenden Beweis von (33).) Daher ist aus dem Verschwinden der eckigen Klammern in (35) unmittelbar (34) abzulesen; die eindeutige Existenz einer mit  $P$  periodischen Lösung  $y(t)$  von (1) ist somit sichergestellt. — Natürlich kann man nun dieses periodische  $y(t)$  aus dem Gleichungssystem (31) für alle  $t$  unmittelbar berechnen, ohne auf die Differentialgleichung (1) zurückzugehen.

Um den Beweis für (33) nachzutragen, differenziere man (32) und drücke die zweiten Ableitungen  $z''_\nu$  nach (6) aus. Man erhält so

$$D'(t) = a(t)D(t), \quad \text{also} \quad D(t) = c \cdot \exp(\int a(t) dt) = c \dot{p}(t).$$

Es ist zu zeigen, daß  $c \neq 0$  sein muß. Bei gegenteiliger Annahme  $c = 0$  wäre  $D(t) \equiv 0$ , d.h.

$$[z_1(t+P) - z_1(t)] \cdot [z'_1(t+P) - z'_1(t)] = [z_2(t+P) - z_2(t)] \cdot [z'_2(t+P) - z'_2(t)].$$

Daraus erhält man

$$(37) \quad \frac{z_1(t+P) - z_1(t)}{z_2(t+P) - z_2(t)} = \text{const}, \quad \text{oder} \quad \frac{z_2(t+P) - z_2(t)}{z_1(t+P) - z_1(t)} = \text{const},$$

wobei jede Gleichung so lange gilt, als der Nenner von Null verschieden ist.

**Fall I.** Es gibt einen Wert  $t_0$ , für den beide Nenner in (37) gleichzeitig verschwinden. Dann gilt bei jeder Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$  in

$$(38) \quad z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t)$$

$$(39) \quad z(t_0 + P) = z(t_0).$$

Man kann nun  $\alpha$  und  $\beta$  so wählen, daß auch

$$(40) \quad z'(t_0 + P) = z'(t_0)$$

wird. Aus (39), (40), (6) und (2) folgt dann aber, daß dieses  $z(t)$  die Periode  $P$  besitzt, was gegen die Voraussetzung des Hauptfalles bei Gleichung (1) verstößt.

**Fall II.** Wenn keine gemeinsame Nullstelle der beiden Nenner in (37) existiert, so gibt es ein Wertepaar  $\lambda, \mu$  derart, daß für alle Werte von  $t$

$$\lambda z_1(t + P) + \mu z_2(t + P) = \lambda z_1(t) + \mu z_2(t)$$

ist. Das bedeutet aber wieder die Existenz einer mit  $P$  periodischen Lösung  $z(t)$  von (6) und führt zum gleichen Widerspruch wie in Fall I.

*Schlußbemerkung.* Da man die allgemeine Lösung von (1) erhält, indem man zu der mit  $P$  periodischen Lösung  $y(t)$  eine beliebige Lösung  $\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$  der homogenen Gleichung (3) hinzufügt, bekommt man weitere für alle Werte von  $t$  endlich bleibende Lösungen, falls  $\varphi_1(t)$  oder  $\varphi_2(t)$  für alle  $t$  beschränkt bleibt.

### § 5. Der Ausnahmefall

Hat die adjungierte homogene Gleichung (6) eine einparametrische Schar mit  $P$  periodischer Lösungen  $z(t)$ , für die jedoch (10) gilt, so ist die erste Gleichung (31) von selbst erfüllt; zur Bestimmung der Anfangswerte  $y(t^*)$  und  $y'(t^*)$  wie im vorigen Paragraphen bleibt also nur die zweite Gleichung (31) übrig. Wie vorhin folgt, daß jede durch die so berechneten Anfangsbedingungen bestimmte Lösung von (1) von selbst die Periode  $P$  hat. Es gibt also jetzt eine einparametrische Schar mit  $P$  periodischer Lösungen  $y(t)$  von (1).

Hat (6) eine zweiparametrische Schar mit  $P$  periodischer Lösungen  $z(t)$ , für die (10) gilt, so sind die beiden Gleichungen (31) von selbst erfüllt. In diesem Fall sind also alle Lösungen  $y(t)$  von (1) mit  $P$  periodisch.

Technische Hochschule  
Braunschweig

(Eingegangen am 5. Februar 1959)

# *Der Resonanzfall bei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

RUDOLF IGLISCH

Vorgelegt von L. COLLATZ

## **§ 1. Problemstellung, Hauptergebnisse**

In der Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + g(y, y', t) = f(t)$$

sei für alle  $t$

$$(2) \quad g(y, y', t + P) = g(y, y', t) \quad \text{und} \quad f(t + P) = f(t).$$

Der Einfachheit halber werde etwa vorausgesetzt, daß  $g(y, y', t)$  stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und  $f(t)$  stetig ist. Es sei eine mit  $P$  periodische Lösung  $y(t)$  von (1) bekannt. Betrachtet wird dann bei geringer Abänderung der rechten Seite die Gleichung

$$(3) \quad z'' + g(z, z', t) = f(t) + \beta F(t)$$

mit

$$(4) \quad F(t + P) = F(t)$$

bei genügend kleinem  $|\beta|$ ; es sollen Aussagen über die zu  $y(t)$  benachbarten Lösungen  $z(t)$  von (3) gemacht werden. Mit

$$(5) \quad z(t) = y(t) + u(t)$$

liefert Subtraktion von (1) von (3)

$$(6) \quad u'' + g(y + u, y' + u', t) - g(y, y', t) = \beta F(t)$$

oder nach Anwendung der Taylor-Formel

$$(7) \quad u'' + g_y(y, y', t) u' + g_{y'}(y, y', t) u = \beta F(t) - \frac{1}{2} \{ \tilde{g}_{yy} u^2 + 2\tilde{g}_{yy'} u u' + \tilde{g}_{y'y'} u'^2 \};$$

dabei soll durch das Zeichen  $\sim$  angedeutet werden, daß Zwischenwerte als Argumente in die betreffenden Funktionen einzusetzen sind. Betrachtet werden nur Lösungen  $u(t)$  mit

$$(8) \quad |u(t)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |u'(t)| \leq \varepsilon$$

bei genügend kleinem  $\varepsilon$ . Die Rolle der homogenen linearen Differentialgleichung\* spielt jetzt

$$(9) \quad \varphi'' + g_{y'}(y, y', t) \varphi' + g_y(y, y', t) \varphi = 0.$$

Die Funktion  $p(t)$  wird analog I, (4)

$$(10) \quad p(t) = \exp\left(\int_0^t g_{y'}(y(t), y'(t), t) dt\right);$$

die zu (9) adjungierte homogene Gleichung (entsprechend I, (6)) braucht hier nicht extra angeschrieben zu werden.

**Satz 1.** (Resonanzfall.) Die zu (9) adjungierte homogene Gleichung habe eine mit  $P$  periodische Lösung

$$(11) \quad z(t) = p(t) \cdot \varphi(t),$$

für die

$$(12) \quad \int_0^P F(t) p(t) \varphi(t) dt = C \neq 0$$

ausfällt; dann nimmt jede Lösung  $u(t)$  von (6) — unabhängig von den Anfangswerten — mit wachsendem  $t$  Werte von der Größenordnung  $|\beta|$  an. — Eine rechte Seite der Größenordnung  $|\beta|$  in (6) erzeugt also Auslenkungen der größeren Größenordnung  $\sqrt{|\beta|}$ . (Vgl. hierzu Satz 4.) — Der Beweis wird in § 2 erbracht.

**Satz 2.** (Hauptfall.) Hat die homogene Gleichung (9) keine mit  $P$  periodische Lösung  $\varphi(t)$ , so hat die inhomogene Gleichung (6) Lösungen  $u(t)$ , die für alle Werte von  $t$  von der Größenordnung  $|\beta|$  bleiben, z. B. die in diesem Fall eindeutig bestimmte mit  $P$  periodische Lösung. (Vgl. die Sätze 5 und 6.) — Den Beweis hierfür findet man in § 3.

Im sog. Ausnahmefall, wenn also die zu (9) adjungierte homogene Gleichung zwar mit  $P$  periodische Lösungen (11) besitzt, für die jedoch

$$\int_0^P F(t) p(t) \varphi(t) dt = 0$$

ist, lassen sich ohne weitere Voraussetzungen über  $g(y, y', t)$  keine allgemeinen Aussagen machen.

## § 2. Der Resonanzfall

Sei also eine (12) genügende mit  $P$  periodische Lösung (11) der zu (9) adjunktiven Gleichung vorhanden. Verfährt man mit der aus (7) und (9) gebildeten Lagrangeschen Identität wie in I §§ 2 oder 3, so gelangt man statt zu I, (25) zu

$$(13) \quad \begin{aligned} p(t) \varphi(t) [u'(t + nP) - u'(t)] - p(t) \varphi'(t) [u(t + nP) - u(t)] &= n\beta C - \\ &- \frac{1}{2} \int_t^{t+nP} \{\tilde{g}_{yy} u^2 + 2\tilde{g}_{yy'} u u' + \tilde{g}_{y'y'} u'^2\} p(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß die beiden Ungleichungen

$$(14) \quad |u(t)| \leq N|\beta|^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad |u'(t)| \leq N|\beta|^{\frac{1}{2}}$$

\* Die Lektüre dieser Arbeit setzt die Bekanntschaft mit der Note des Verf. „Der Resonanzbegriff bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen“ [Diese Z. 3, 179—186 (1959)] voraus. Zitate von Gleichungs- oder Paragraphennummern aus dieser früheren Note werden durch eine vorgesetzte I gekennzeichnet.

mit einer später zu bestimmenden Konstanten  $N$  nicht für alle Werte von  $t$  gelten können. Mit den Bezeichnungen I, (26) gelangt man wie von I, (25) zu I, (27) jetzt von (13) zu

$$(15) \quad D|u'(t+P) - u'(t)| \geq |\beta| n C - 2MN|\beta|^{\frac{1}{2}} - \mathcal{S}|\beta|N^2n,$$

wo  $\mathcal{S}$  aus der Beschränkung des Integrals in (13) kommt. Daraus erhält man unter nochmaliger Benutzung von (14)

$$2N|\beta|^{\frac{1}{2}}(D+M) \geq n|\beta|(|C| - \mathcal{S}N^2).$$

Wählt man jetzt  $N$  so, daß

$$(16) \quad |C| - \mathcal{S}N^2 = B > 0$$

wird, so bekommt man einen Widerspruch für

$$n > \frac{2N(D+M)}{B|\beta|^{\frac{1}{2}}}.$$

Das Ergebnis läßt sich auch so aussprechen:

**Satz 3.** *Mindestens in einem Intervall der Länge*

$$\frac{2N(D+M)}{B|\beta|^{\frac{1}{2}}} \cdot P$$

muß entweder einmal  $|u(t)| > N|\beta|^{\frac{1}{2}}$  oder  $|u'(t)| > N|\beta|^{\frac{1}{2}}$  geworden sein mit  $N$  aus (16).

Um gemäß Satz 1 eine analoge Aussage für  $|u(t)|$  allein machen zu können, benötigt man den

*Hilfssatz 1. Bei den beiden Differentialgleichungen*

$$(17) \quad u'' + a(t)u' = g(t)$$

und

$$(18) \quad v'' + \alpha v' = G(t)$$

sei

$$\alpha < a(t), \quad g(t) < G(t) \leq H,$$

$$(19) \quad v'(t_0) = u'(t_0) = u'_0 > 0,$$

$$v(t_0) = u(t_0) = u_0.$$

Man setze

$$(20) \quad m = \text{Min}(e^\alpha, 1).$$

Dann gilt im Intervall

$$(21) \quad t_0 - 1 \leq t \leq t_0,$$

$$(22) \quad u'(t) \geq v'(t) \geq u'_0 m - \frac{H}{\alpha}(e^\alpha - 1),$$

falls die rechte Seite dieser Abschätzung positiv ist.

Zum Beweise setze man

$$(23) \quad w(t) = v(t) - u(t)$$

und subtrahiere (17) von (18):

$$w'' + \alpha w' = -(\alpha - a(t))u' + (G(t) - g(t)).$$

Außerdem ist

$$w(t_0) = 0 = w'(t_0), \quad w''(t_0) > 0.$$

Für  $t < t_0$  ist

$$w'(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-t_0)} [-(\alpha - a(t)) u' + (G(t) - g(t))] dt < 0,$$

solange  $u' > 0$  ist für  $t < t_0$ , also erst recht, solange dort  $v' > 0$  ist, wie ein Blick auf (23) zeigt. Aus (18) rechnet man

$$v'(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^t G(t) e^{\alpha(t-t_0)} dt + u'_0 e^{-\alpha(t-t_0)},$$

also nach der zweiten Beziehung (19) und Berechnung des Integrals

$$v'(t) \geq u'_0 e^{\alpha(t_0-t)} - \frac{H}{\alpha} [e^{\alpha(t_0-t)} - 1].$$

Betrachtet man nur das Intervall (21) und benutzt (20), so erhält man aus der letzten Abschätzung die Behauptung (22) des Hilfssatzes 1.

Die Anwendung dieses Hilfssatzes geschieht so:

Wir wollen die Annahme

$$(24) \quad |u(t)| \leq T |\beta|^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } t$$

mit einer später zu bestimmenden Konstanten  $T < N$  zum Widerspruch führen. Dazu schreiben wir (7) so um:

$$(25) \quad u'' + \{g_{yy}(y, y', t) + \tilde{g}_{yy'} u + \frac{1}{2} \tilde{g}_{y'y'} u'\} u' = \beta F(t) - g_y(y, y', t) u - \frac{1}{2} \tilde{g}_{yy} u^2.$$

Als Stelle  $t_0$  des Hilfssatzes wählen wir eine Stelle, wo  $|u'(t_0)| > N |\beta|^{\frac{1}{2}}$  ist, was nach Satz 3 geht, wenn (24) angenommen wird. Wir wollen zunächst

$$(26) \quad u'(t_0) > N |\beta|^{\frac{1}{2}}$$

voraussetzen.

In (25) lässt sich wegen (8) die geschweifte Klammer nach unten durch eine Schranke  $\alpha$  abschätzen, der Betrag der rechten Seite nach oben durch eine Schranke der Form

$$H = |\beta| [F + U T^2] + |\beta|^{\frac{1}{2}} R T,$$

wenn man (24) beachtet. Verwendet man zu (25) als Vergleichsgleichung

$$v'' + \alpha v' = H$$

und beachtet (26), so liefert der Hilfssatz gemäß (22)

$$(27) \quad u'(t) \geq m N |\beta|^{\frac{1}{2}} - |\beta| \frac{F + U T^2}{\alpha} (e^\alpha - 1) - R T |\beta|^{\frac{1}{2}} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$$

für das Intervall (21), falls die rechte Seite positiv ist. Wir wollen sie sogar größer machen als  $2 T |\beta|^{\frac{1}{2}}$ . Dazu braucht man nur für

$$m N - R T \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} - O(\sqrt{|\beta|}) > 2 T$$

zu sorgen, d.h. für

$$mN - O(\sqrt{|\beta|}) > \left[ 2 + R \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \right] T$$

oder

$$(28) \quad T < \frac{mN - O(|\beta|)}{2 + R \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}}.$$

Integration von (27) zwischen  $t_0 - 1$  und  $t_0$  liefert dann die zu (24) widersprüchsvolle Beziehung

$$(29) \quad |u(t_0) - u(t_0 - 1)| > 2T|\beta|^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Ungleichung gilt sogar ohne die Absolutstriche. Die gleiche Überlegung führt aber auch zu (29), falls statt (26)

$$u'(t_0) < -N|\beta|^{\frac{1}{2}}$$

angenommen wird; in diesem Falle würde aber linker Hand in (29)  $u(t_0 - 1) - u(t_0)$  zu stehen haben, so daß (29) mit den Absolutstrichen in beiden Fällen richtig ist.

Aus (24) und Satz 3 liest man ab den

**Satz 4.** *Mindestens in einem Intervall der Länge*

$$\frac{2N(D+M)}{B|\beta|^{\frac{1}{2}}} P + 1$$

muß einmal  $|u(t)| > T|\beta|^{\frac{1}{2}}$  geworden sein mit  $T$  aus (28).

Damit ist aber Satz 4 bewiesen.

### § 3. Der Hauptfall

In diesem Paragraphen wird vorausgesetzt, daß die homogene Gleichung (9) keine mit  $P$  periodische Lösung  $\varphi(t)$  besitzt. Zunächst soll bewiesen werden der

**Satz 5.** *Zu genügend kleinem  $|\beta|$  besitzt (1) genau eine kleine Lösung  $u(t)$  mit der Periode  $P$ .*

Zum Beweise benötigt man einen bekannten Hauptsatz aus der Theorie der impliziten Funktionen, der hier formuliert sei als

*Hilfssatz 2.*  $\varphi(A, B, \beta)$  und  $\psi(A, B, \beta)$  mögen in einer gewissen Umgebung des Wertetripels  $(0, 0, 0)$  stetige erste Ableitungen besitzen; außerdem sei

$$(30) \quad \varphi(0, 0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(0, 0, 0) = 0,$$

ferner

$$(31) \quad \begin{vmatrix} \varphi_A(0, 0, 0) & \varphi_B(0, 0, 0) \\ \psi_A(0, 0, 0) & \psi_B(0, 0, 0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dann gibt es zu jedem genügend kleinen  $\beta$  eindeutig ein kleines Lösungssystem  $A, B$  der Gleichungen

$$(32) \quad \varphi(A, B, \beta) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(A, B, \beta) = 0.$$

Die Anwendung des Hilfssatzes geschieht so: Man charakterisiere jede Lösung  $u(t)$  von (6) durch ihre Anfangswerte

$$(33) \quad u(0) = A, \quad u'(0) = B,$$

also  $u = u(t; A, B, \beta)$ . Dieses  $u$  ist dann und nur dann mit  $P$  periodisch, wenn gleichzeitig

$$(34) \quad \begin{aligned} \varphi(A, B, \beta) &\equiv u(P; A, B, \beta) - u(0; A, B, \beta) = 0, \\ \psi(A, B, \beta) &\equiv u'(P; A, B, \beta) - u'(0; A, B, \beta) = 0 \end{aligned}$$

gilt. Aus (6) sieht man unmittelbar, daß  $u(t; 0, 0, 0) = 0$  gilt, so daß (30) erfüllt ist. Die Ableitungsvoraussetzungen des Hilfssatzes sind nach bekannten Sätzen über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von (6) von dem Parameter  $\beta$  und den Anfangswerten  $A, B$  gleichfalls erfüllt. Differentiation von (6) nach  $A$  oder  $B$  liefert, daß

$$\varphi_1^*(t) = u_A(t; A, B, \beta) \quad \text{und} \quad \varphi_2^*(t) = u_B(t; A, B, \beta)$$

Lösungen von

$$\varphi^{*''} + g_{y'}(y + u, y' + u', t) \varphi^{*'} + g_y(y + u, y' + u', t) \varphi^* = 0$$

sind. Also erweisen sich

$$\varphi_1(t) = u_A(t; 0, 0, 0) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = u_B(t; 0, 0, 0)$$

als Lösungen von (9), u.zw. sind sie linear unabhängig, da

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_1'(0) &= 0 \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 1 \end{aligned}$$

ist. Die Determinante (31) wird  $D^*(0)$ , wenn

$$D^*(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t+P) - \varphi_1(t) & \varphi_2(t+P) - \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t+P) - \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t+P) - \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Daß  $D^*(t) \neq 0$  ist für alle Werte von  $t$ , wird genauso bewiesen wie I, (33), nur hat man statt I, (6) jetzt unsere Gleichung (9) zu verwenden. Damit sind alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt. Es existiert mithin zu jedem genügend kleinen  $\beta$  genau eine mit  $P$  periodische kleine Lösung  $u(t)$  von (6).

Schließlich brauchen wir noch

**Satz 6.** Die mit  $P$  periodische Lösung  $u(t)$  von (6) genügt für alle  $t$  einer Ungleichung der Form

$$(35) \quad |u(t)| \leq \text{const} |\beta|.$$

*Beweis.* Genau wie I, (31) erhält man jetzt für dieses mit  $P$  periodische  $u(t)$  die Beziehungen ( $v = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} u'(t) [\dot{p}(t+P) \varphi_v(t+P) - \dot{p}(t) \varphi_v(t)] - u(t) [\dot{p}(t+P) \varphi'_v(t+P) - \dot{p}(t) \varphi'_v(t)] \\ = \beta \int_t^{t+P} F(t) \varphi_v(t) dt - \frac{1}{2} \int_t^{t+P} \{\tilde{g}_{yy} u^2 + 2\tilde{g}_{yy'} u u' + \tilde{g}_{y'y'} u'^2\} \dot{p}(t) \varphi_v(t) dt. \end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante ist wieder  $D(t)$  aus I, (32), also für alle Werte von  $t$  von Null verschieden. Die homogene Gleichung (9) und die dazu adjungierte (vgl. I, (6)) haben ja nach I, § 2, Zusatz I genau die gleiche Anzahl mit  $P$

periodischer Lösungen, bei uns also keine. Mit Hilfe der Cramerschen Auflösungsformel errechnet sich nun

$$u(t) = -\frac{1}{D(t)} \begin{vmatrix} p(t+P)\varphi_1(t+P) - p(t)\varphi_1(t) & \beta \int\limits_t^{t+P} F p \varphi_1 dt - \frac{1}{2} \int\limits_t^{t+P} \{\dots\} p \varphi_1 dt \\ p(t+P)\varphi_2(t+P) - p(t)\varphi_2(t) & \beta \int\limits_t^{t+P} F p \varphi_2 dt - \frac{1}{2} \int\limits_t^{t+P} \{\dots\} p \varphi_2 dt \end{vmatrix}.$$

Setzt man

$$Z = \max_{0 \leq t \leq P} |u(t)|,$$

so folgt, wenn man für  $t$  eine Stelle mit  $u(t) = Z$  einsetzt, aus der vorigen Gleichung sofort eine Ungleichung der Form

$$Z \leq K|\beta| + LZ^2,$$

also

$$Z(1 - LZ) \leq K|\beta|$$

und damit (35), wenn man (8) beachtet.

Satz 5 und Satz 6 enthalten Satz 2.

Technische Hochschule  
Braunschweig

(Eingegangen am 5. Februar 1959)

# Singular Integral Equations of Volterra Type and the Finite Part of Divergent Integrals

P. L. BUTZER

*Communicated by A. ERDÉLYI*

## 1. Introduction

In an earlier paper by the writer [2] the calculus of MIKUSIŃSKI was applied to non-singular integral equations of the convolution type. The object of the present essay is to discuss and solve by operational methods singular integral equations of the types

$$(I) \quad FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du = g(t) \quad (t > 0),$$

$$(II) \quad FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du + g(t) = f(t) \quad (t > 0),$$

of the first and second kind respectively for integral and non-integral values of  $\alpha \geq 1^1$ . In the more common case  $\alpha < 1$ , both integrals exist in the ordinary sense provided for example  $f$  is a bounded function. For  $\alpha \geq 1$  an interpretation of the divergent integrals may be sought by CAUCHY's principal values for  $\alpha = 1$  and HADAMARD's finite parts for  $\alpha > 1$ . Equations of this type occur in aerodynamics, as for example the Prandtl equation in airfoil theory.

According to HADAMARD [7] we have the definition

$$(1.1) \quad FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \int_0^{t-\varepsilon} \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du - Q(\varepsilon) \right],$$

where  $Q(\varepsilon)$  is the unique linear combination of negative powers of  $\varepsilon$  and of  $\log \varepsilon$  which must be subtracted in order that the limit may exist. To find the explicit expression of  $Q(\varepsilon)$  for a particular value of  $\alpha$ , the integral and non-integral cases of  $\alpha$  must be treated separately. Thus, if  $f$  is absolutely continuous,

$$(1.2) \quad FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du = f(0) \log t + \int_0^t \log(t-u) f'(u) du,$$

and

$$FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\frac{1}{2}}} du = -\frac{2f(0)}{\sqrt{t}} - 2 \int_0^t \frac{f'(u)}{\sqrt{t-u}} du.$$

---

<sup>1</sup> This problem was first stated in a colloquium lecture held by the author at the Technische Hogeschool, Eindhoven, Holland, May 23, 1958.

In the first formula the “finite part” FP can be replaced by the Cauchy principal value. The evaluation of the finite part<sup>2</sup> becomes increasingly laborious for higher values of  $\alpha$ , and even after such steps have been performed the equation in question remains to be solved. Operational methods such as the Laplace transform may be suggested for example.

In the following we proceed along different lines and define an operator  $\{FP\ 1/t^\alpha\}$  for integral and non-integral values of  $\alpha \geq 1$  for the half-line  $t \geq 0$ . This will be an operator in the sense of MIKUSIŃSKI [10], [5], having properties not unlike the Laplace transform of the distribution  $[1/t^\alpha]$  of SCHWARTZ [12], defined for the half-line  $t \geq 0$ . A generalized version of the operational calculus of MIKUSIŃSKI is then introduced and applied to solve the integral equations. Later in Section 3 a solution of the general equation (I) is given for integral and non-integral  $\alpha \geq 1$ , while particular equations of type (II) are solved in Section 4.

Proceeding to summarize the results required from MIKUSIŃSKI’s calculus, let  $\mathbf{C}$  be the class of functions of  $t$  which are continuous for  $t \geq 0$ . Throughout this paper  $f$  or  $\{f(t)\}$  denotes the function *per se* and  $f(t)$  the value at  $t$ . The addition of two functions  $f$  and  $g$  in  $\mathbf{C}$  is defined in the usual manner and the product  $fg$  as the convolution

$$(1.3) \quad fg = \{f(t)\}\{g(t)\} = \left\{ \int_0^t f(t-u) g(u) du \right\}.$$

This defines a commutative ring with no unit element. According to a theorem of TITCHMARCH this ring has no divisors of zero. It can therefore be extended to a quotient field, the *field*  $\mathbf{K}$  of *operators* of MIKUSIŃSKI whose elements  $f/g$ ,  $g \neq \{0\}$ ,  $f, g \in \mathbf{C}$ , are called *operators*. This field contains the complex numbers, the class  $\mathbf{C}$ , the class  $\mathbf{L}$  of functions which are Lebesgue integrable over  $(0, t)$  for every  $t > 0$  and also contains a unit element  $1$  which is the element corresponding to the Dirac delta function  $\delta(t)$ . The integral operator  $l = \{1\}$  with the property

$$l\{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(u) du \right\}$$

is also contained in  $\mathbf{K}$ . More generally

$$(1.4) \quad l^{n+1}\{f(t)\} = \left\{ \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f(u) du \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Furthermore  $\mathbf{K}$  contains the differential operators  $s = 1/l$ . If the  $(n-1)^{\text{th}}$  derivative  $f^{(n-1)}$  is absolutely continuous for  $t \geq 0$  and  $f^{(k)} = \{f^{(k)}(t)\}$ , it can be shown that

$$s^n f = f^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{(n-i-1)}(0).$$

For details to the above the reader is referred to MIKUSIŃSKI [10] or ERDÉLYI [5].

<sup>2</sup> G. TEMPLE [15] considered the finite part of divergent integrals from the point of view of “weak” functions. F. J. BUREAU [1] has given a detailed discussion of the notion of finite part of divergent integrals, also emphasizing the historical aspect. See also LIGHTHILL [18].

## 2. The Operator $\{FP 1/t^\alpha\}$ , $\alpha \geq 1$

Proceeding from these known facts, we consider functions which are integrable over every interval  $(\varepsilon, t)$ ,  $\varepsilon > 0$ , but *not* over  $(0, t)$ . For special functions of this kind, e.g. for  $1/t^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ , we define the operator  $\{FP 1/t^\alpha\}$ . Let  $[\alpha]$  denote the greatest integer  $\leq \alpha$ .

*Definition 2.1.* For  $\alpha \geq 1$  we define<sup>3</sup>  $\{FP 1/t^\alpha\}$  by means of the convolution product

$$(2.1) \quad l^{[\alpha]} \{FP 1/t^\alpha\} = \left\{ FP \int_0^t \frac{(t-u)^{[\alpha]-1}}{\Gamma([\alpha])} \frac{du}{u^\alpha} \right\},$$

provided the latter integral exists as HADAMARD's finite part defined in (1.1).  $\Gamma([\alpha])$  is the usual Gamma function with argument  $[\alpha]$ .

On employing the binomial theorem, we may write the right-hand side of (2.1) in the form

$$(2.2) \quad \left\{ \frac{t^{[\alpha]-1}}{\Gamma([\alpha])} \sum_{i=0}^{[\alpha]-1} \binom{[\alpha]-1}{i} \left( -\frac{1}{t} \right)^i FP \int_0^t \frac{du}{u^{\alpha-i}} \right\}.$$

The case when  $\alpha$  takes integral values and the case for non-integral values are treated separately. In the first of the two cases we have:

**Lemma 2.1.** *If  $\alpha = k$ ,  $k$  any positive integer, then*

$$\{FP 1/t^k\} = s^k h \in \mathbf{K},$$

where

$$h = (1/\Gamma(k)) \{ \zeta_k + (-1)^{k-1} \log t \} \in \mathbf{L},$$

and

$$\zeta_k = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(-1)^{i+1}}{k-1-i} \binom{k-1}{i}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Note that  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = -1$ ,  $\zeta_3 = \frac{3}{2}$ ,  $\zeta_4 = -\frac{11}{6}$ ,  $\zeta_5 = \frac{25}{12}$ , ..., where the  $\zeta_i$ 's alternate in sign.

To establish Lemma 2.1 one may write (2.2) as

$$(2.3) \quad \left\{ \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \left[ \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} \left( -\frac{1}{t} \right)^i FP \int_0^t \frac{du}{u^{k-i}} + \binom{k-1}{k-1} \left( -\frac{1}{t} \right)^{k-1} FP \int_0^t \frac{du}{u} \right] \right\},$$

and since

$$(2.4) \quad FP \int_0^t \frac{du}{u} = \log t, \quad FP \int_0^t \frac{du}{u^\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1,$$

the expression (2.3) is readily seen to equal  $h$ . Obviously  $\{FP 1/t^k\} = s^k h$  does not represent a function but is an operator in the sense of MIKUSIŃSKI. If  $s^k h$  had been a function, it would have been

$$\int_0^t \delta^{(k)}(t-u) h(u) du = h^{(k)}(t).$$

<sup>3</sup> This notation may perhaps be a poor choice as  $\{FP 1/t^\alpha\}$  is an operator and not a function, but we prefer its use here in comparison with the function  $\{1/t^\alpha\}$  for  $\alpha < 1$ .

For the evaluations necessary in Section 3 we proceed to identify the operator  $\{FP 1/t^\alpha\}$  not with the quotient  $h/l^k$  but with an equivalent quotient of two different functions of  $C$ .

For this purpose we employ the function<sup>4</sup> ([6] p. 217)

$$(2.5) \quad v(t) = \int_0^\infty \frac{t^u}{\Gamma(u+1)} du$$

which is a finite and continuous function of  $t$ .

Then again use shall be made of the identity ([16] p. 179)

$$(2.6) \quad \int_0^t [\log u + \xi - \gamma] v[(t-u)e^\xi] du = -t \quad (t > 0)$$

where  $\gamma = -\Gamma'(1) = 0.57721567\dots$  is EULER's constant and  $\xi$  is an arbitrary constant.

Multiplying both numerator and denominator of the quotient  $h/l^k$  by  $\{v(te^\xi)\}$  with

$$(2.7) \quad \xi = (-1)^{k-1} \zeta_k + \gamma,$$

we obtain the required equivalent form for  $\{FP 1/t^k\}$ , namely

$$(2.8) \quad \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{\{\zeta_k + (-1)^{k-1} \log t\} \{v(te^\xi)\}}{l^k \{v(te^\xi)\}} = \frac{(-1)^k l^2}{\Gamma(k) l^k \{v(te^\xi)\}}$$

using the identity (2.6).

We now give another definition of  $\{FP 1/t^\alpha\}$  for integral  $\alpha$ .

*Definition 2.2.*

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \{FP 1/t\} &= s \{\log t\}, \\ \{FP 1/t^{k+1}\} &= \frac{-s}{k} \{FP 1/t^k\} + \frac{(-1)^k s^k}{k \cdot k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

It is readily seen that this definition is equivalent to that of Lemma 2.1, often being of wider application however. It shows the close connection with the distributional calculus of SCHWARTZ<sup>5</sup> defined over the half-line  $t \geq 0$  ([12], vol. I, p. 42).

Next we consider the second case where  $\alpha$  is any positive real number  $\neq 1, 2, 3, \dots$

**Lemma 2.2.** *If  $\alpha = k + \beta$ , where  $0 < \beta < 1$  and  $k$  is integral valued, then*

$$(2.10) \quad \{FP 1/t^{k+\beta}\} = \frac{(-1)^k \Gamma(1-\beta) s^{k+\beta-1}}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+k-1)} \in K.$$

**Proof.** By hypothesis, we may write (2.2) in the form

$$(2.11) \quad \left\{ \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{-1}{t}\right)^i F P \int_0^t \frac{du}{u^{k+\beta-i}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\Gamma(k) t^\beta} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{k+\beta-1-i} \binom{k-1}{i} \right\}.$$

<sup>4</sup> This function was first used by VOLTERRA in his theory of convolutions, a theory which may perhaps be regarded as a predecessor to the theory of MIKUSIŃSKI (see TEMPLE [14]).

<sup>5</sup> Also treated in SAUER [11] p. 242. For the actual connection between the theory of SCHWARTZ and that of MIKUSIŃSKI, see FENYÖ [17].

Making use of the identity

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{k+\beta-1-i} \binom{k-1}{i} = \frac{(-1)^k \Gamma(k)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+k-1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(k) \Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\beta)},$$

and the property ([10] p. 101)

$$(2.12) \quad \left\{ \frac{1}{t^\beta} \right\} = \Gamma(1-\beta) t^{1-\beta} \quad (\beta < 1),$$

the product of the operator (2.11) with  $t^k$  takes on the form (2.10), establishing the lemma.

*Definition 2.3.* We define by induction for  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\{FP 1/t^{k+\beta}\} = \frac{-s}{k+\beta-1} \{FP 1/t^{k+\beta-1}\}, \quad 0 < \beta < 1.$$

This definition is equivalent to that given by Lemma 2.2, provided of course the property (2.12) is used.

It is now possible to summarize the results obtained in the following table.

Table 1

|                 |  |
|-----------------|--|
| 1)              | $\{t^n\} = n! t^{n+1} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$   |
| 2)              | $\{t^\lambda\} = \Gamma(1+\lambda) t^{\lambda+1} = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{s^{\lambda+1}}, \quad \lambda > 0$   |
| 3)              | $\{1\} = l = \frac{1}{s}$  |
| 4)              | $\left\{ \frac{1}{t^\beta} \right\} = \Gamma(1-\beta) t^{1-\beta} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{s^{1-\beta}}, \quad 0 < \beta < 1,$   |
| 5) <sup>6</sup> | $\left\{ FP \frac{1}{t} \right\} = s \{ \log t \}$   |
| 6)              | $\left\{ FP \frac{1}{t^k} \right\} = \frac{s^k}{\Gamma(k)} \{ \zeta_k + (-1)^{k-1} \log t \}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$  |
| 7)              | $\left\{ FP \frac{1}{t^{1+\beta}} \right\} = -\frac{\Gamma(1-\beta) s^\beta}{\beta}, \quad 0 < \beta < 1$  |
| 8)              | $\left\{ FP \frac{1}{t^{k+\beta}} \right\} = (-1)^k \frac{\Gamma(1-\beta) s^{k+\beta-1}}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad 0 < \beta < 1.$ |

The first three elements belong to the space **C**, the fourth to **L**, while the last four belong to the field **K** of operators. Entries 1) to 4) have already been given by MIKUSIŃSKI ([11] p. 328) and are stated for the sake of comparison.

Having introduced the operator  $\{FP 1/t^\alpha\}$ ,  $\alpha \geq 1$  into the Mikusiński calculus, it remains to investigate the rules of operation of this operator with other functions in **C**. Just as the convolution product of  $t^{n+1}$  with  $f$  was discussed in (1.4), the product of  $\{FP 1/t^\alpha\}$  with  $\{f(t)\}$  can be treated in its turn.

<sup>6</sup> Compare also LAVOINE [9] concerning a similar result in the distributional calculus; also O'KEEFFE [19, 20].

**Theorem 2.1.** If  $\alpha \geq 1$  and  $f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}$  is absolutely continuous for  $t \geq 0$  and  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(\lceil \alpha \rceil - 2)}(0) = 0$ , then

$$\{F P 1/t^\alpha\} \{f(t)\} = \left\{ F P \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du \right\}.$$

**Proof.** Firstly we establish the result for non-integral values of  $\alpha \geq 1$ . Suppose  $\alpha = k + \beta$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $k$  any integer  $\geq 1$ . If  $f^{(k-1)}$  is absolutely continuous, then it is known (cf. [8] p. 665)

$$(2.13) \quad \begin{aligned} F P \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{k+\beta}} du &= \frac{-1}{k+\beta-1} \frac{f(0)}{t^{k+\beta-1}} - \frac{1}{k+\beta-1} F P \int_0^t \frac{f'(u)}{(t-u)^{k+\beta-1}} du \\ &= \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \\ &= -\frac{f(0)}{(k+\beta-1) t^{k+\beta-1}} + \frac{f'(0)}{(k+\beta-1)(k+\beta-2) t^{k+\beta-2}} - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k f^{(k-1)}(0)}{(k+\beta-1) \dots (\beta+1) \beta t^\beta} + \frac{(-1)^k}{(k+\beta-1) \dots (\beta+1) \beta} \int_0^t \frac{f^{(k)}(u)}{(t-u)^\beta} du. \end{aligned}$$

On the other hand, according to Definition 2.3, if  $f$  is absolutely continuous, it follows that

$$\left\{ F P \frac{1}{t^{k+\beta}} \right\} f = \frac{-f(0)}{k+\beta-1} \left\{ F P \frac{1}{t^{k+\beta-1}} \right\} - \frac{1}{k+\beta-1} \{f'(t)\} \left\{ F P \frac{1}{t^{k+\beta-1}} \right\}.$$

Repeating this operation

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \left\{ F P \frac{1}{t^{k+\beta}} \right\} f &= -\frac{f(0)}{k+\beta-1} \left\{ F P \frac{1}{t^{k+\beta-1}} \right\} + \frac{f'(0)}{(k+\beta-1)(k+\beta-2)} \left\{ F P \frac{1}{t^{k+\beta-2}} \right\} - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k f^{(k-1)}(0)}{(k+\beta-1) \dots \beta} \left\{ \frac{1}{t^\beta} \right\} + \frac{(-1)^k}{(k+\beta-1) \dots \beta} \{f^k(t)\} \left\{ \frac{1}{t^\beta} \right\}, \end{aligned}$$

on the assumption that  $f^{(k-1)}$  is absolutely continuous. A comparison<sup>6a</sup> of (2.13) with (2.14) completes the proof for the non-integral case.

A comparison of formula (2.2) with

$$(2.15) \quad \{F P 1/t\} f = f(0) \{\log t\} + f' \{\log t\}$$

in case  $f$  is absolutely continuous extends the result for the integral value  $k = 1$ . If  $f^{(k-1)}$  is absolutely continuous, we proceed similarly as in the non-integral case. Comparing the expressions obtained by  $k$ -times repeated application of formula (2.15) with that of (2.2) likewise repeated  $k$  times, the desired result follows.

### 3. Solutions of the singular Integral Equation (I)

Solutions of (I) in case  $\alpha$  is integral and in case  $\alpha$  is non-integral can be given.

**Theorem 3.1.** Let  $k$  be any integer  $\geq 1$  and let  $f^{(k-1)}$  be absolutely continuous for  $t \geq 0$  and  $g \in \mathbf{L}$ . In the case  $k \geq 3$ , and  $f^{(i)}(0) = 0$ , for  $i = 0, 1, \dots, k-2$ , the

<sup>6a</sup> Here the vanishing of the derivatives of  $f$  at zero is needed as the right term of the equation in Theorem 2.1 is only defined (as follows from (2.13)) if the given derivatives vanish at zero.

solution of

$$(3.1) \quad F P \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^k} du = g(t) \quad (t > 0)$$

is given by

$$(3.2) \quad f(t) = (-1)^k \Gamma(k) \int_0^t \frac{(t-u)^{k-3}}{\Gamma(k-2)} \left[ \int_0^u g(w) v[(u-w)e^\xi] dw \right] du$$

where  $v(t)$  is defined in (2.5) and  $\xi$  in (2.7).

**Proof.** According to Theorem 2.1, equation (3.1) takes on the operational form

$$\{F P 1/t^k\}\{f(t)\} = \{g(t)\}.$$

By Lemma 2.1 and the relation (2.8) it follows that

$$(3.3) \quad f = \frac{l^k g}{h} = (-1)^k \Gamma(k) l^{k-2} \{v(t e^\xi)\} g.$$

The solution then is

$$f(t) = (-1)^k \Gamma(k) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} g(w) v[(t_{k-1}-w)e^\xi] dw,$$

which is equivalent to (3.2). This solution satisfies the given equation (3.1).

*Remark.* From equation (3.3) it is obvious that for  $k=1$ , the solution of (3.1) is given by

$$f(t) = -\frac{d}{dt} \left[ \int_0^t g(u) v[(t-u)e^\gamma] du \right]$$

(since  $\xi=\gamma$  here), provided the indefinite integral in the square brackets is absolutely continuous, which is the case if  $g$  is absolutely continuous. Under this hypothesis and applying a theorem on the differentiation of a convolution product (*cf.* DOETSCH [3] p. 118) we may write the solution in the form

$$f(t) = -g(0) v(t e^\gamma) - \int_0^t g'(u) v[(t-u)e^\gamma] du.$$

For  $k=2$ , since  $\xi=1+\gamma$ , the solution is

$$f(t) = \int_0^t g(u) v[(t-u)e^{1+\gamma}] du,$$

provided  $g \in \mathbf{L}$  and  $f(0)=0$ .

**Theorem 3.2.** Let  $\alpha=k+\beta$ ,  $0<\beta<1$ ,  $k$  any integer  $\geqq 1$ . If  $f^{(k-1)}$  is absolutely continuous for  $t \geqq 0$  and  $g \in \mathbf{L}$ , and  $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(k-2)}(0)=0$ , the solution of

$$(3.4) \quad F P \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{k+\beta}} du = g(t) \quad (t > 0),$$

is given by

$$f(t) = (-1)^k (k+\beta-1) \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \int_0^t (t-u)^{k+\beta-2} g(u) du.$$

**Proof.** Since  $f^{(k-1)}$  is absolutely continuous, we apply Theorem 2.1 and it remains to solve

$$\{FP 1/t^{k+\beta}\} f = g.$$

By Lemma 2.2

$$f = \frac{(-1)^k \Gamma(k+\beta)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma(\beta)} t^{k+\beta-1} g,$$

and since  $[\Gamma(1-\beta) \Gamma(\beta)]^{-1} = (1/\pi) \sin \beta \pi$ , the theorem follows.

The different integral equations with the corresponding solutions obtained from Theorem 3.1 and 3.2 for particular choices of  $k$  and  $\alpha$  are listed below. The first integral with solution is the well-known Abel equation (see also [2]), given for the sake of comparison. The table can easily be extended for different and larger, integral and non-integral values of  $\alpha$ .

Table 2

|    | Integral Equation  | Solution  |
|----|--|---|
| 1) | $\int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\frac{1}{2}}} du = g(t)$    | $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{\frac{1}{2}}} du \right]$ |
| 2) | $FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)} du = g(t)$               | $f(t) = -\frac{d}{dt} \left[ \int_0^t g(u) v[(t-u) e^\gamma] du \right]$                        |
| 3) | $FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\frac{3}{2}}} du = g(t)$ | $f(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{\frac{1}{2}}} du$                           |
| 4) | $FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^2} du = g(t)$             | $f(t) = \int_0^t g(u) v[(t-u) e^{1+\gamma}] du$   |
| 5) | $FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\frac{5}{2}}} du = g(t)$ | $f(t) = \frac{3}{2\pi} \int_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}} g(u) du$                                    |
| 6) | $FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^3} du = g(t)$             | $f(t) = -2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} g(u) v[(t-u) e^{\frac{3}{2}+\gamma}] du$                  |
|    | ⋮  | ⋮   |

#### 4. Special singular Integral Equations of the Second Kind

Let us consider a Prandtl-type equation used in airfoil theory, one of the Volterra type instead of the usual one with range of integration over a fixed finite interval  $(-\eta, \eta)$  (e.g. ELLIOTT [4], SÖHNGEN [13]).

**Theorem 4.1.** Let  $f$  be absolutely continuous for  $t \geq 0$  and  $g \in \mathbf{L}$ . The solution of

$$(4.4) \quad FP \int_0^t \frac{f'(u)}{t-u} du + g(t) = f(t) \quad (t > 0),$$

is given by

$$(4.2) \quad f(t) = \int_0^t g(u) q(t-u) du + f(0) \left[ 1 - \int_0^t q(u) du \right],$$

where  $q(t)$  is defined by the integral along the line  $\Re p = c$

$$(4.3) \quad q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(\gamma - \log p) - 1} dp,$$

$c$  being a suitable, large positive quantity.

**Proof.** We may write (4.1) in the operational form as

$$\{F P 1/t\} f' + g = f,$$

and multiplying both sides of this equation by  $\{v(te^\gamma)\}$  we have

$$(4.4) \quad \{v(te^\gamma)\} \{\log t\} sf' = (f - g) \{v(te^\gamma)\}.$$

Making use of the identity (2.6) and the fact that

$$sf' = s[sf - f(0)] = s^2 f - sf(0)$$

which holds since  $f$  is absolutely continuous, we can write (4.4) as

$$f(1+v) = g v + l f(0),$$

where for simplicity we set  $\{v(te^\gamma)\} = v$ . Hence

$$(4.5) \quad f = \frac{v}{1+v} g + \frac{l f(0)}{1+v}.$$

But for  $v \in C$ , it is a known fact ([9], [1]) that

$$(4.6) \quad \frac{v}{1+v} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v^n, \quad \frac{1}{1+v} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v^n.$$

The problem now is to evaluate<sup>7</sup> these sums explicitly. With  $v(te^\gamma)$  as defined in (2.5) it can readily be established by induction that the  $n^{\text{th}}$  convolution power  $v^n(te^\gamma)$  is given by

$$(4.7) \quad v^n(te^\gamma) = \int_0^\infty \frac{e^{\gamma u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{t^{u+n-1}}{\Gamma(u+n)} du$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots$ . (This can also be established indirectly using Laplace transforms and formulas (18) and (19), p. 222 of [6].) Now in the calculus of residues it is a known fact that (e.g. DOETSCH [3] p. 213)

$$(4.8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{u+n}} dp = \frac{t^{u+n-1}}{\Gamma(u+n)},$$

<sup>7</sup> The writer is greatly indebted to A. ERDÉLYI for generously providing the key to this argument and the contour integral representation for  $q(t)$ .

where  $c$  is a suitable positive quantity. Formally then we proceed as follows. Inserting (4.8) in (4.7) we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v^n(t e^{\gamma}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{\gamma u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} du \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\beta t}}{p^{u+n}} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\beta t} dp \int_0^{\infty} \frac{e^{\gamma u}}{p^{u+1} \Gamma(n)} \left(\frac{u}{p}\right)^{n-1} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\beta t} dp \int_0^{\infty} \frac{e^{\gamma u}}{p^{u+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(-\frac{u}{p}\right)^{n-1} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\beta t} dp \int_0^{\infty} \frac{1}{p} (e^{\gamma} p^{-1} e^{-1/p})^u du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\beta t}}{p(\gamma - \log p - 1)} dp. \end{aligned}$$

The interchange of the order of integration here effected is justified; also term-by-term integration as

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| \frac{e^{\gamma u}}{p^{u+1} \Gamma(n)} \left(-\frac{u}{p}\right)^{n-1} \right| du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n (\log r - \gamma)^n} \quad (|p| = r),$$

is convergent for  $p$  sufficiently large. Hence if  $c$  is sufficiently large we have obtained a contour integral representation for the first sum in (4.6). Regarding the second sum in (4.6) we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v^n = 1 - \{q(t)\},$$

where 1 is the unit element in  $\mathbf{K}$ . In view of equation (4.5) our theorem now follows.

The method is not restricted to this equation but can be extended to cover singular integral equations which reduce to algebraic equations of the form

$$\{FP 1/t^k\} \{f^{(k)}(t)\} + g = f,$$

$k$  integral, provided  $f^{(k-1)}$  is absolutely continuous, and  $f(0) = \dots = f^{(k-2)}(0) = 0$ .

In the non-integral case we consider only one special case:

$$(4.9) \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}} FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\frac{3}{2}}} du + \frac{1}{\sqrt{\pi} t} = f(t) \quad (t > 0).$$

In the operational form

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} (-2\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{2}} f) + l^{\frac{1}{2}} = f,$$

with solution

$$f = \frac{l}{1+l^{\frac{1}{2}}} = l^{\frac{1}{2}} - \frac{l^{\frac{1}{2}}}{1+l^{\frac{1}{2}}} = l^{\frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} l^{n/2}.$$

Hence

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} t} + \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

To determine this sum-function the sum can be broken up into two parts corresponding to terms with odd and even powers of  $\sqrt{t}$  respectively. Those with even powers give

$$\frac{(\sqrt{t})^2}{\Gamma(1)} + \frac{(\sqrt{t})^4}{\Gamma(2)} + \frac{(\sqrt{t})^6}{\Gamma(3)} + \dots = t e^t.$$

Those with odd powers

$$-\frac{\sqrt{t}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{(\sqrt{t})^3}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{(\sqrt{t})^5}{\Gamma(\frac{5}{2})} - \dots = -\frac{\sqrt{t}}{\Gamma(\frac{1}{2})} [1 + \sqrt{t} h(\sqrt{t})],$$

where

$$h(t) = \frac{t}{\frac{1}{2}} + \frac{t^3}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} + \frac{t^5}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} + \dots.$$

Now the derivative  $h'(t)$  satisfies  $h'(t) = 2 + 2t h(t)$ , whence it follows that  $h(t) = 2e^{t^2} \int_0^t e^{-u^2} du$ . Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = t e^t - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2t e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du.$$

The solution  $f(t)$  of (4.9) then takes the form

$$f(t) = e^t (1 - \operatorname{erf} \sqrt{t}),$$

where  $\operatorname{erf} t$  is the usual error function. Indeed, this function is a solution to the original equation (4.9).

The more general problem<sup>8</sup> of treating singular integral equations of the type

$$F P \int_0^t \frac{J_0(u)}{u} f(t-u) du = g(t) \quad (t > 0),$$

say, with kernel of the form  $j(t)/t^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ , where  $j$  and  $f$  are bounded functions for  $t \geq 0$  for example, instead of the simpler form  $1/t^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ , remains open.

### References

- [1] BUREAU, F. J.: Divergent integrals and partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 143–202 (1955).
- [2] BUTZER, P. L.: Die Anwendung des Operatorenkalküls von JAN MIKUSIŃSKI auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus. Arch. rational Mech. Anal. **2**, 114–128 (1958).
- [3] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I. Basel 1950.
- [4] ELLIOTT, J.: On an integro-differential operator of the Cauchy type. Proc. A. M. Soc. **7**, 616–625 (1956).
- [5] ERDÉLYI, A.: Operational Calculus, California Institute of Technology (mimeographed lecture notes). Pasadena 1955.

<sup>8</sup> This question was drawn to the author's attention by H. G. TILLMANN during the course of several conversations on singular integral equations, which the writer especially appreciates.

- [6] ERDÉLYI, A., W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER & F. TRICOMI: Higher Transcendental functions, vol. III. New York 1955.
- [7] HADAMARD, J.: Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris 1932 (nouvelle édition).
- [8] KOREVAAR, J.: Distributions defined from the point of view of applied mathematics, I—V. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **58**, 368—378, 379—389, 483—493, 494—503, 663—674 (1955).
- [9] LAVOINE, J.: Sur les transformées de Laplace de certaines distributions. C. R. Acad. Sci., Paris **242**, 717—719 (1956).
- [10] MIKUSIŃSKI, J.: Operatorenrechnung, Berlin 1957. English edition: Operational Calculus, Warsaw 1958.
- [11] SAUER, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 2. erw. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
- [12] SCHWARTZ, L.: Théorie des Distributions, Paris, Tome I (seconde édition), 1957, Tome II, 1951.
- [13] SÖHNGEN, H.: Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation. Math. Z. **60**, 31—51 (1954).
- [14] TEMPLE, G.: Theories and applications of generalized functions. J. Lond. Math. Soc. **28**, 134—148 (1953).
- [15] TEMPLE, G.: Weak functions and the “finite part” of divergent integrals, in: Studies in Mathematics and Mechanics, p. 135—140. New York 1954.
- [16] VOLTERRA, V., & J. PÉRÈS: Théorie générale des fonctionnelles, t. 1, Généralités sur les fonctionnelles, Théorie des équations intégrales, Paris 1936.
- [17] FENYÖ, S.: Über den Zusammenhang zwischen den Mikusińskischen Operatoren und den Distributionen. Math. Nachr. **19**, 161—164 (1958).
- [18] LIGHTHILL, M. J.: Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. Cambr. Mono. on Mech. and appl. Math., N.Y. 1958.
- [19] O'KEEFFE, J.: Singularities of Hadamard's finite part of improper integrals in the distributions of SCHWARTZ. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **6**, 65—82 (1957).
- [20] O'KEEFFE, J.: Distribution theory of the operational calculus. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **6**, 157—170 (1957).
- [21] WESTON, J. D.<sup>9</sup>: An extension of the Laplace-transform calculus. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **6**, 325—333 (1957).

<sup>9</sup> J. D. WESTON [21] has recently outlined an approach to the operational calculus which adds an algebraic structure to the classical Laplace-transform theory, thereby reconciling MIKUSIŃSKI's algebraic approach and the analytical point of view.

Montreal, Canada  
and  
The Technical University  
Aachen, Germany

(Received February 24, 1959)

# *Asymptotic Representations for Differential Equations with a Regular Singular Point*

KARL G. GUDERLEY

*Communicated by C. TRUESDELL*

## **Introduction**

Considered are asymptotic solutions for differential equations of the forms

$$y'' - \lambda^2(x-1)^{-2}g_1(\dot{x}, \lambda^{-1})y = 0, \quad (1a)$$

$$y'' - \lambda^2x(x-1)^{-2}g_1(x, \lambda^{-1})y = 0. \quad (1b)$$

Here  $x$  and  $y$  are the dependent and independent variables respectively, primes indicate differentiations with respect to  $x$ ,  $\lambda$  is a parameter which is allowed to assume large values,  $g_1(x, \lambda^{-1})$  is a one-valued analytic function of  $x$  and  $\lambda^{-1}$  which, at least for large values of  $\lambda$ , is free of singularities and zeros within the region of the complex  $x$ -plane under consideration.

The point  $x=1$  is a singular point; in its vicinity the solutions can be represented in the form

$$y_I = (x-1)^{\varrho_1} P_1(x-1), \quad (2a)$$

$$y_{II} = (x-1)^{\varrho_2} P_2(x-1) \quad (2b)$$

except if  $\varrho_1 - \varrho_2$  is an integer.  $P_1$ ,  $P_2$  and later similar expressions stand for functions which are regular at  $x=1$  and can therefore be represented by power series. The exponents  $\varrho_1$  and  $\varrho_2$  may be defined so that

$$\operatorname{Re} \varrho_1 \geq \operatorname{Re} \varrho_2.$$

The purpose of the present paper is to derive asymptotic representations (for large values of  $\lambda$ ) for the solutions (2a) and (2b). The classical formulae for asymptotic representations always give two linearly independent expressions for the exact solutions of (1). At  $x=1$  they even have a form corresponding to (2). However, it is not justified to assume that the asymptotic expression possessing at  $x=1$  a behavior like (2b) represents the exact solution defined by (2b). In fact, for a differential equation with transition point, (1b), such a coordination would be wrong.

The expressions (2) give more than merely the behavior at  $x=1$ . They imply that, if  $y_I$  and  $y_{II}$  are continued around a path in the complex  $x$ -plane which encircles  $x=1$  in the positive sense, their original values will be multiplied by factors  $e^{2\pi i \varrho_1}$  and  $e^{2\pi i \varrho_2}$  respectively. This property makes it possible to characterize the solutions  $y_I$  and  $y_{II}$  at a distance from the singular point, and

on this basis the desired representation for  $y_{II}$  will be obtained. The present paper gives the main features of the argument leading to this result. More details can be found in [I].

### 1. Region without Transition Point

Let

$$g_2(x, \lambda^{-1}) = [g_1(x, \lambda^{-1}) + \frac{1}{4} \lambda^{-2}]^{\frac{1}{2}}.$$

Of the two branches of  $g_2$ , that one will be used for which

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg [\lambda g_2(1, \lambda^{-1})] \leq \frac{1}{2}\pi.$$

The argument  $\lambda^{-1}$  of  $g_2$  and other expressions will be omitted in subsequent formulae. The exponents of the regular singular point at  $x=1$  are given by

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{1}{2} + \lambda g_2(1), \\ \varrho_2 &= \frac{1}{2} - \lambda g_2(1). \end{aligned} \quad (3)$$

Let

$$h(x) = e^{i\pi} \int_0^x (\xi - 1)^{-1} g_2(\xi) d\xi. \quad (4)$$

To define the argument of the function  $h(x)$ , we require a condition for the lower limit of the integral, viz.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} [\arg(\xi - 1)] = i\pi. \quad (4a)$$

Then two linearly independent asymptotic solutions of (1a) are given by

$$Y_{1,2} = h'(x)^{-\frac{1}{2}} \exp(\mp \lambda h(x)). \quad (5)$$

They are asymptotic in the following sense: Assume that at a point  $x=b$  one has an exact solution  $y$  for which one pair of the following relations holds

$$\begin{aligned} y(x) &= Y_1(x) (1 + O(\lambda^{-1})), \\ y'(x) &= Y_1'(x) (1 + O(\lambda^{-1})) \end{aligned} \quad (6a)$$

or

$$\begin{aligned} y(x) &= Y_2(x) (1 + O(\lambda^{-1})), \\ y'(x) &= Y_2'(x) (1 + O(\lambda^{-1})). \end{aligned} \quad (6b)$$

Then these relations hold for all points of the  $x$ -plane which can be reached along paths for which the real parts of the exponential function in (5) does not decrease.  $b$  will subsequently be called the "point of matching". Equation (4) may be written in the form

$$h(x) = h^*(x) + h_1(x), \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} h^*(x) &= e^{i\pi} g_2(1) \int_0^x (\xi - 1)^{-1} d\xi \\ &= e^{i\pi} g_2(1) [\ln(x - 1) - i\pi] \end{aligned} \quad (7a)$$

and

$$h_1(x) = e^{i\pi} \int_0^x (g_2(\xi) - g_2^{(1)}(1)) (\xi - 1)^{-1} d\xi. \quad (7b)$$

Then for the vicinity of  $x=1$

$$Y_{1,2} = e^{-\frac{1}{2}i\pi} [g_2(1)^{-\frac{1}{2}} e^{\pm\lambda(-g_2(1)i\pi+h_1(1))}] (x - 1)^{\frac{1}{2}\pm\lambda g_2(1)} (1 + O(x - 1)). \quad (8)$$

Thus at points near to  $x=1$  the asymptotic expressions have the form (2). The function  $h$ , and accordingly the regions of validity of the asymptotic expressions (5), depend upon the function  $g_1$ . It can however be shown that  $h$  has the same topological character as the function  $h^*$ . Therefore future discussion of the regions of validity can be restricted to  $h^*$ . According to (7a),  $h^*$  has a logarithmic branch point at  $x=1$ . To obtain a survey of all Riemann sheets, we consider  $h^*$  as a function of a variable  $\eta$  defined by

$$\eta = -\ln(x-1). \quad (9)$$

This relation maps the entire  $x$ -plane into a strip of the  $\eta$ -plane of width  $2\pi$  in the imaginary direction. Fig. 1 shows the region considered, in the  $x$ -plane.

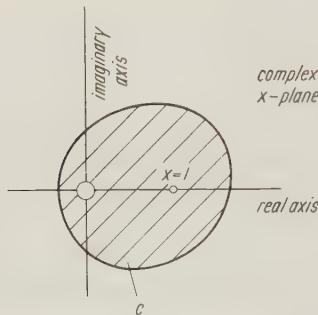


Fig. 1. Region  $C$  in the complex  $x$ -plane

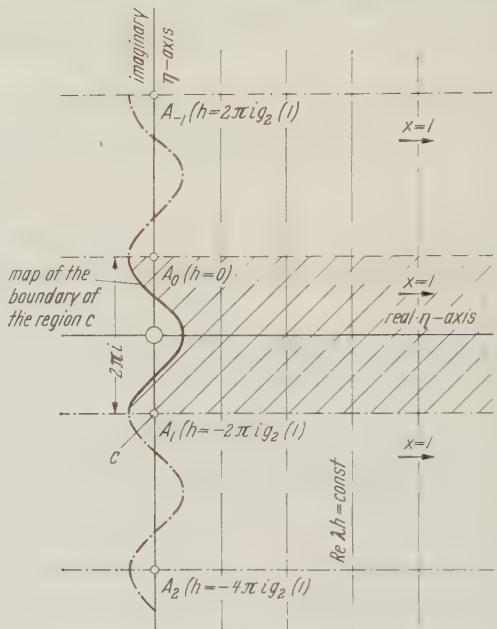


Fig. 2. Region  $C$  in the complex  $\eta$ -plane with lines  $\operatorname{Re} \lambda h = \text{const}$ ;  $\lambda g_2(1)$  real

The corresponding representation in the  $\eta$ -plane is shown in Fig. 2. (The straight dash dot lines in Fig. 2 and in the subsequent figures are the boundaries of such a strip; they correspond to a branch cut in the  $x$ -plane extending along the real axis from  $x=1$  to negative infinity.) The point  $x=1$  is mapped onto  $+\infty$  in the  $\eta$ -plane;  $x=\infty$ , to  $-\infty$ . Travelling along a closed path around  $x=1$  in the positive sense, one arrives at a point  $\eta$  which arises from the starting point by subtracting  $2\pi i$ ; e.g., the origin of the  $x$ -plane is mapped onto the points  $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ . When  $A_0$  is the starting point,  $A_1$  is reached by travelling around  $x=1$  once in the positive sense. The region  $C$  in which the asymptotic solutions are considered may be bounded (Fig. 1); the boundary in the  $\eta$ -plane is shown in Fig. 2 but omitted in all subsequent Figures. Thus the shaded part of Fig. 1 will map into the shaded part of Fig. 2.

The solid vertical lines in Fig. 2 are lines of constant real part of  $\lambda h^*$  drawn under the assumption that  $\lambda g_2(1)$  is real. Fig. 3 is a corresponding sketch for a complex value of  $\lambda g_2(1)$ .

The definitions of  $g_2$  and  $h$  are such that  $\operatorname{Re} \lambda h$  tends to  $+\infty$  as one approaches the point  $x=1$ , or as  $\operatorname{Re} \eta$  tends to  $+\infty$  for a bounded imaginary part of  $\eta$ .

Therefore in the expression  $Y_1$  in (5), the real part of the argument of the exponential function increases if the real part of  $\eta$  decreases. Consequently the point of matching will be chosen at  $x=b=1$ , i.e., at  $\infty$  to the right in Figs. 2 and 3. Then all points of the region  $C$  in Figs. 2 and 3 can be reached by admissible paths, and in the entire region  $C$  there is an exact solution  $y_3$  for which is valid the relation

$$y_3(x) = Y_1(x) (1 + O(\lambda^{-1})).$$

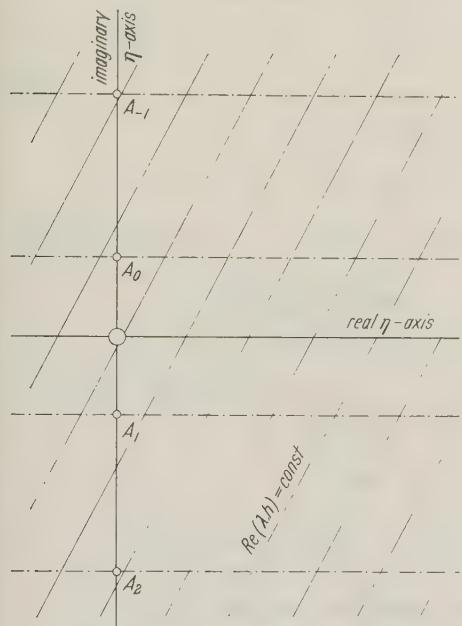


Fig. 3. Complex  $\eta$ -plane with lines  $\text{Re } \lambda h = \text{const}$ ;  
 $\lambda g_2(1)$  complex

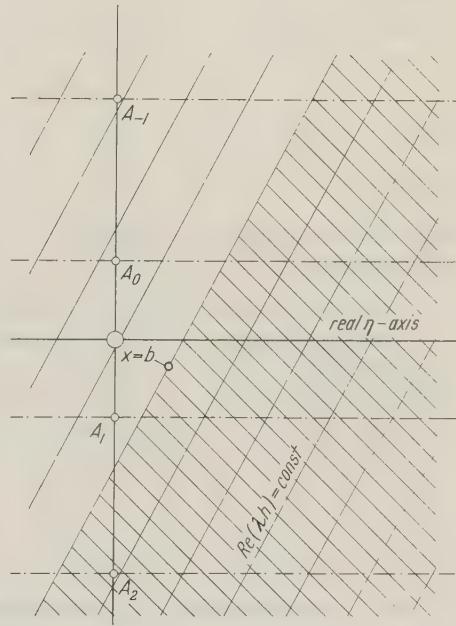


Fig. 4. Region of validity for  $Y_2$

Since the exact solution  $y_I$  becomes small in comparison to  $y_{II}$  as one approaches  $x=1$ , it can be shown without difficulty that, except for a factor,  $y_3$  is identical with  $y_I$ . This factor can be found immediately from (8). Thus

$$y_I = e^{\frac{1}{2}i\pi} g_2(1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(-g_2(1)i\pi+h_1(1))} Y_1(1 + O(\lambda^{-1})). \quad (10)$$

In order to obtain a large region of validity for the asymptotic solution  $Y_2$ , the point of matching  $b$ , must be taken far to the left in the complex  $\eta$ -plane. But then it is impossible to decide on the basis of the appearance of the expression  $Y_2$  at the point  $x=1$  whether the exact solution represented is a multiple of  $y_{II}$  or a linear combination of  $y_I$  and  $y_{II}$ .

Here the idea described in the introduction is helpful. Let us denote by  $y_4$  the exact solution which matches  $Y_2$  at the point  $x=b$ . Then there exists a region extending over several sheets of the  $x$ -plane, for which

$$y_4(x) = Y_2(x) (1 + O(\lambda^{-1})). \quad (11)$$

The shaded part of Fig. 4 is the region of validity of this expression. Let us ascribe the numbers  $-1, 0, 1, \dots$  to different sheets of the complex  $x$ -plane in

such a way that one arrives upon the sheet with the next higher number by a complete circuit around  $x=1$  in the positive sense. Let us differentiate between the values of  $x$  lying in different sheets by superscripts in parenthesis. Then the form of  $Y_2$  given in (8) shows that

$$Y_2(x^{(1)}) = e^{2\pi i \varrho_2} Y_2(x^{(0)}). \quad (12)$$

Furthermore, because of the definition of  $y_I$  and  $y_{II}$ , one has

$$y_I(x^{(1)}) = e^{2\pi i \varrho_1} y_I(x^{(0)}), \quad (12a)$$

$$y_{II}(x^{(1)}) = e^{2\pi i \varrho_2} y_{II}(x^{(0)}). \quad (12b)$$

$y_4$  can be represented as a linear combination of  $y_I$  and  $y_{II}$

$$y_4(x) = c_I y_I(x) + c_{II} y_{II}(x).$$

This relation is valid at points  $x^{(0)}$  as well as at point  $x^{(1)}$ . Using (11) and (12) one thus obtains

$$c_I y_I(x^{(0)}) + c_{II} y_{II}(x^{(0)}) = Y_2(x^{(0)}) (1 + O(\lambda^{-1})),$$

$$c_I y_I(x^{(0)}) e^{2\pi i \varrho_1} + c_{II} y_{II}(x^{(0)}) e^{2\pi i \varrho_2} = Y_2(x^{(0)}) e^{2\pi i \varrho_2} (1 + O(\lambda^{-1})).$$

Using the asymptotic representation for  $y_I$ , (10), and the explicit expressions for  $\varrho_1$  and  $\varrho_2$ , (3), one finds from the above equations

$$\begin{aligned} y_{II} &= e^{i\pi/2} g_2(1)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(-g_2(1)i\pi+h_1(1))} \times \\ &\quad \times Y_{II} \left\{ 1 + O(\lambda^{-1}) + O(\lambda^{-1}) \frac{Y_1(x)}{Y_2(x)} - \frac{Y_2(b)}{Y_1(b)} \frac{e^{-2\pi i \lambda g_2(1)}}{\sinh(2\pi i \lambda g_2(1))} \right\}. \end{aligned}$$

## 2. Differential Equations with a Regular Singular Point and a Transition Point

For the differential equation with a transition point (1b), the procedure is in principle the same. One first finds overlapping Riemann sheets in which the asymptotic solutions are valid. Then the relations connecting the solutions in these two sheets will give the desired result. A slight complication arises from the more complicated structure of the Riemann sheets and the fact that the asymptotic solutions appear here in a form which is less tractable than in the previous case. The main points of the proofs will be sketched and then the results will be given. For further details see [1]. Let

$$h(x) = e^{i\pi} \int_0^x (\xi - 1)^{-1} \xi^{\frac{1}{2}} g_2(\xi) d\xi. \quad (13)$$

For the lower limit  $x=0$  of the integral, let

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\arg(\xi - 1)] = i\pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\arg(\xi)] = 0.$$

Two linearly independent asymptotic solutions are now defined by

$$Y_\alpha = e^{i\pi/2 + 2i\pi/3} \lambda^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} h(x)^{\frac{1}{2}} h'(x)^{-\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\lambda h(x) e^{3i\pi/2}) \quad (14a)$$

and

$$Y_\beta = e^{2i\pi/3} \lambda^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} h(x)^{\frac{1}{3}} h'(x)^{-\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\lambda h(x) e^{i\pi/2}). \quad (14b)$$

The following asymptotic representations for the Hankel functions will be needed:

$$H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-5i\pi/12} z^{-\frac{1}{2}} e^{iz} (1 + O(z^{-1})), \quad -\pi < \arg z < 2\pi \quad (15a)$$

and

$$H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(z) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/6} z^{-\frac{1}{2}} [\cos(z - \pi/4) + O(z^{-1}) \cosh(\operatorname{Im} z)], \quad \pi < \arg z < 3\pi. \quad (15b)$$

Using (15a) one finds

$$Y_\alpha = h'(x)^{-\frac{1}{3}} e^{\lambda h} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad -\frac{5}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{1}{2}\pi, \quad (16a)$$

$$Y_\beta = h'(x)^{-\frac{1}{3}} e^{-\lambda h} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad -\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{3}{2}\pi. \quad (16b)$$

The last expressions are identical with the expressions (5); but they are less general than (14) since their region of validity does not include the origin and the lines  $\arg \lambda h = \frac{1}{2}\pi$  and  $\arg \lambda h = \frac{3}{2}\pi$  respectively. The expressions (14) are approximations of exact solution in the following sense. Let us assume that exact solutions  $y_\alpha$  and  $y_\beta$  are chosen such that at a point  $x=b$  the following relations are fulfilled:

$$y_\alpha(b) = Y_\alpha(b); \quad y_\beta(b) = Y_\beta(b),$$

$$y'_\alpha(b) = Y'_\alpha(b); \quad y'_\beta(b) = Y'_\beta(b).$$

Then one has

$$y_{\alpha, \beta} = Y_{\alpha, \beta} + O(\lambda^{-\frac{5}{3}}) |h(x)|^{\frac{1}{6}} |h'(x)|^{-\frac{1}{2}} M_1(M_2 + |\lambda|^{\frac{2}{3}} |h(x)|^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} e^{\pm \lambda h(x)} \quad (17)$$

for all points that can be reached from  $x=b$  along a path for which  $\operatorname{Re} \pm \lambda h$  does not decrease; the positive sign is to be used for  $y_\alpha$  the negative sign for  $y_\beta$ ,  $M_1$  and  $M_2$  are two positive constants, independent of  $\lambda$  and  $x$ . In the error term the following restriction in the argument of  $\lambda h$  must be observed

$$-\frac{5}{2}\pi \leq \arg \lambda h \leq \frac{1}{2}\pi \quad \text{for } y_\alpha, \quad (17a)$$

$$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg \lambda h \leq \frac{3}{2}\pi \quad \text{for } y_\beta. \quad (17b)$$

Moreover, admissible paths will not go through a point for which  $h'=0$ , unless simultaneously  $h=0$ .

The function  $h$  is written in the form

$$h = h^* + h_1, \quad (18)$$

where

$$h^*(x) = e^{i\pi/2} g_2(1) \int_0^x \xi^{\frac{1}{2}} (\xi - 1)^{-1} d\xi, \quad (19a)$$

$$h_1(x) = e^{i\pi/2} \int_0^x \xi^{\frac{1}{2}} (\xi - 1)^{-1} [g_2(\xi) - g_2(1)] d\xi. \quad (19b)$$

There is a wide class of functions  $h$  having regions of validity with the same topological structure as that of the function  $h^*$ . To problems of this kind our future considerations are restricted.

To show the behavior of the asymptotic expressions at the point  $x=1$  we write  $h$  in the form

$$h = e^{i\pi} \left[ g_2(1) \int_0^x (\xi - 1)^{-1} d\xi + h_2(x) \right] = e^{i\pi} [g_2(1) [\ln(x-1) - i\pi] + h_2(x)] \quad (20a)$$

where

$$h_2(x) = \int_0^x (\xi - 1)^{-1} [\xi^{\frac{1}{2}} g_2(\xi) - g_2(1)] d\xi. \quad (20b)$$

$h_2$  is regular at  $x=1$ . Then one finds from (16) for the vicinity of point  $x=1$

$$Y_{\alpha, \beta} = e^{-i\pi/2} g_2(1)^{-\frac{1}{2}} e^{\pm \lambda [g_2(1)i\pi - h_2(1)]} (x-1)^{\frac{1}{2} \mp \lambda g_2(1)} [1 + O(\lambda^{-1})] [1 + O(x-1)]. \quad (21)$$

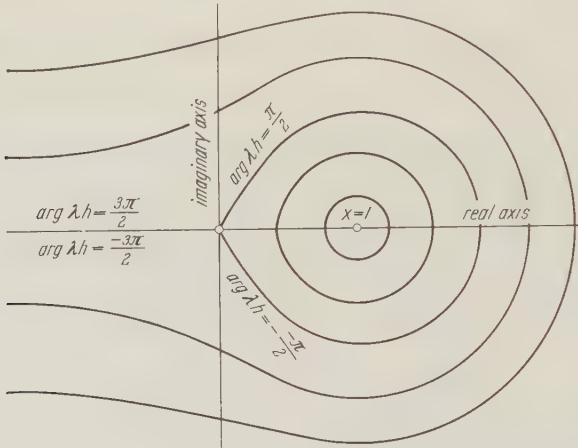


Fig. 5. Lines  $\text{Re } \lambda h = \text{const}$  in the complex  $x$ -plane for a differential equation with transition point;  $\lambda g_2(1)$  real

The expression  $h^*$ , (19a), can be integrated

$$h^*(x) = e^{i\pi} g_2(1) \left[ 2\sqrt{x} + \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - i\pi \right].$$

On the basis of this formula, or by qualitative considerations, one can carry out the discussion of the regions of validity. Assume first that  $\lambda g_2(1)$  is real. A sketch of  $\text{Re } \lambda h^*$  in the  $x$ -plane is given in Fig. 5. In the vicinity of  $x=1$  the dominant term in  $h^*$  is  $\ln(x-1)$ , the lines of constant real part of  $\lambda h^*$  are circles, at a greater distance they are closed curves. In the vicinity of  $x=0$  the expression (19a) for  $h^*$  can be integrated to give

$$h^*(x) = g_2(1) \left( \frac{2}{3} \right) x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Thus  $h^*$  maps itself into two sheets of the complex  $x$ -plane. The lines of constant real part have a branch point at  $x=0$ , the branches form angles  $\pm \frac{1}{3}\pi$  and  $\pi$  with the positive real axis. For very large values of  $x$  the term  $x^{\frac{3}{2}}$  prevails in the expression for  $h^*$ ; the curves of constant real part become parabolic. These considerations lead to Fig. 5. As in the previous section a representation in terms of the variable  $\eta$ , (9), is chosen in order to give a better survey of all Riemann sheets. However, this variable does not remove the branching of the Riemann surface at  $x=0$ ; therefore branch cuts, starting at the maps of point  $x=0$ , must be introduced. They will be chosen to follow one of the branches of the lines  $\text{Re } \lambda h = \text{const}$  which run through the maps of  $x=0$ ; no need will arise

for admissible paths to cross these barriers. The mapping from the  $x$ -plane to the  $\eta$ -plane is conformal for  $x=0$ ; therefore the character of the branching remains unchanged. Expressing  $h^*$  in term of  $\eta$ , one finds: for  $x \rightarrow \infty$ , i.e., for  $\operatorname{Re} \eta \rightarrow -\infty$

$$h^* \sim -2g_2(1) e^{-\eta/2}$$

for  $x \rightarrow 1$ , i.e., for  $\operatorname{Re} \eta \rightarrow \infty$

$$h^* \sim -g_2(1) \eta.$$

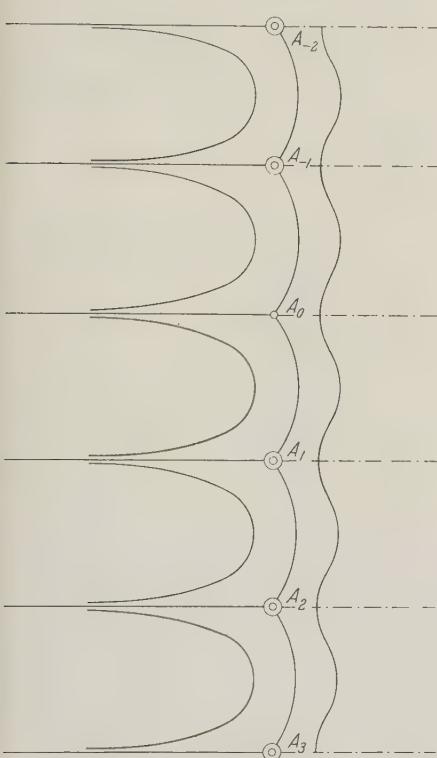


Fig. 6. Lines  $\operatorname{Re} \lambda h = \text{const}$  in the complex  $\eta$ -plane for a differential equation with transition point;  $\lambda g_2(1)$  real

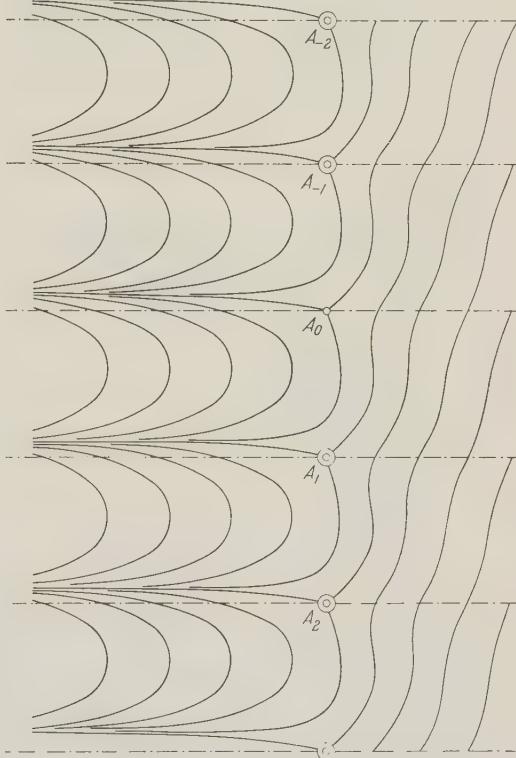


Fig. 7. Lines  $\operatorname{Re} \lambda h = \text{const}$  in the complex  $\eta$ -plane for a differential equation with transition point;  $\lambda g_2(1)$  complex

On the basis of these remarks the equivalent to Fig. 5 in the  $\eta$ -plane has been drawn in Fig. 6. The points  $A_{-2} \dots A_3$  are maps of the origin of the  $x$ -plane. The line connecting them is the closed line  $\operatorname{Re} \lambda h = \text{const}$  of Fig. 5 which starts and ends at the origin. The wavy line to the right of the points  $A$  in Fig. 6 is the map of a closed curve around  $x=1$ . As one goes to the right such lines will approach vertical straight lines. This gives the connection with Fig. 2. The curves to the left of the row of points  $A$  represent curves  $\operatorname{Re} \lambda h = \text{const}$  of the  $x$ -plane which lie outside of the closed curve  $\operatorname{Re} \lambda h = \text{const}$  going through the origin.

Similar discussion can be carried out if  $\lambda g_2(1)$  has a complex value. The result is shown in Fig. 7.

In studying the regions of validity one must choose a starting point for the various paths, and then determine which regions of the  $\eta$ -plane can be reached

by paths for which  $\operatorname{Re}(\pm\lambda h)$  (the positive sign for  $Y_\alpha$ , the negative sign for  $Y_\beta$ ) never decreases. If one branch of a certain line  $\operatorname{Re}\lambda h = \text{const}$  can be reached by an admissible path, all of its points can be reached. One may, therefore, consider the lines  $\operatorname{Re}\lambda h = \text{const}$  as contour lines, and determine the region in which an asymptotic solution is valid, by proceeding from one line  $\operatorname{Re}\lambda h = \text{const}$  to the next one, as a rising flood would proceed from contour line to contour line. In such a procedure the origin of the  $x$ -plane needs special attention. In its vicinity  $h = \text{const} + \text{const } x^{\frac{1}{2}}$ , and this character is carried over into the  $\eta$ -plane. The first constant is unessential as far as the character of the contour lines is concerned. The function  $h$  extends through two sheets because of the expression  $x^{\frac{1}{2}}$ . In different sheets the direction of increasing  $\operatorname{Re}\lambda h$  is different.

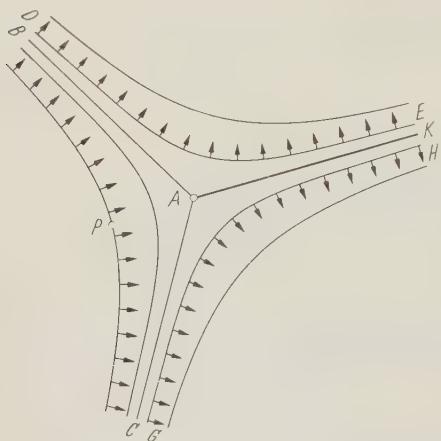


Fig. 8. Contour lines in the vicinity of a transition point

The vicinity of such a point is shown in Fig. 8, and it is assumed that the direction of increasing  $\operatorname{Re}\lambda h$  is known at a certain point  $P$  of one sheet. Then it can be determined at other points by consideration of continuity. In this process one finds quite automatically that a branch cut must be introduced along  $AK$ . One notices that once the level of  $AB$  or  $AC$  is exceeded, the region of validity extends immediately along  $AK$ . Points of the line  $AK$  can be reached only by means of the path  $AK$ , i.e., along a path going through point  $A$ . It was

mentioned before that an admissible path must not go through a point for which  $h' = 0$  unless  $h = 0$  simultaneously. In our example, paths going through point  $A_0$  in Figs. 6 or 7 are allowed, but all other points "A" are forbidden; they are marked by double circles. For a branch cut starting at one of the "forbidden" points "A" the asymptotic solutions are not valid; actually even the vicinity of such branch cuts must be excluded. These branch cuts are indicated in the subsequent figures by double lines. A branch cut for which an asymptotic solution is valid is indicated by a single heavy line. On the basis of these remarks, the reader will recognize how the limits of validity shown for  $Y_\alpha$  in Fig. 9 and for  $Y_\beta$  in Fig. 10 arise. In each case the point  $x = b$  indicates the point of matching. In (16) limits for  $\arg\lambda h$  were imposed. The branch cuts starting in Figs. 9 and 10 at point  $A_0$  correspond to these limits.

On account of its behavior at  $x = 1$ , (21), the exact solution represented by  $Y_\beta$  can be immediately identified with a multiple of  $y_1$ . One thus obtains

$$y_1 \sim e^{i\pi/2} g_2(1)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda [g_2(1)i\pi - h_2(1)]} Y_\beta \quad (22)$$

except for the vicinity of the double lines in Fig. 10. To characterize these lines in the  $x$ -plane one first determines the curve for which

$$\arg\lambda h = \frac{3\pi}{2}$$

using paths which do not encircle  $x=1$ . This line starts at  $x=0$  and extends to infinity. In the Riemann sheet for which  $h=0$  at  $x=0$  this line represents a branch cut for  $h$  but not for the function  $Y_\beta$ . In all other Riemann sheets this line represents the limit of validity of the asymptotic solutions. Naturally, for practical purposes the asymptotic solution is needed in only one Riemann sheet.

Replacing the Bessel function in (22) by its asymptotic representation (15a), one finds

$$y_I = e^{i\pi/2} g_2(1)^{1/2} e^{\lambda[g_2(1)i\pi - h_2(1)]} h'(x)^{-1/2} e^{-\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) \quad -\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{3}{2}\pi. \quad (22a)$$

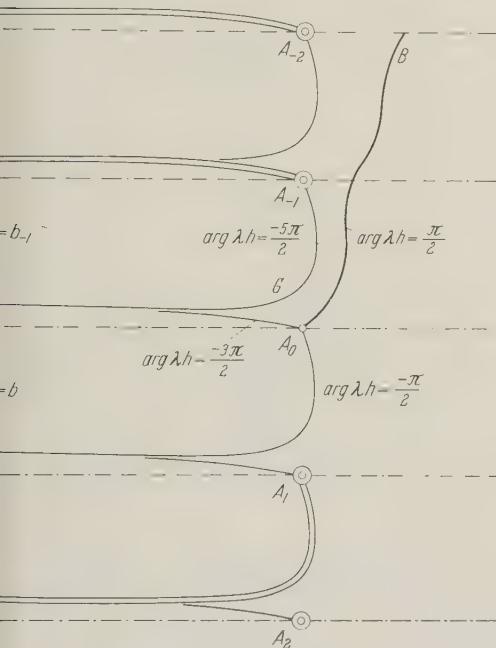


Fig. 9. Region of validity for  $Y_\alpha$  in the complex  $\eta$ -plane

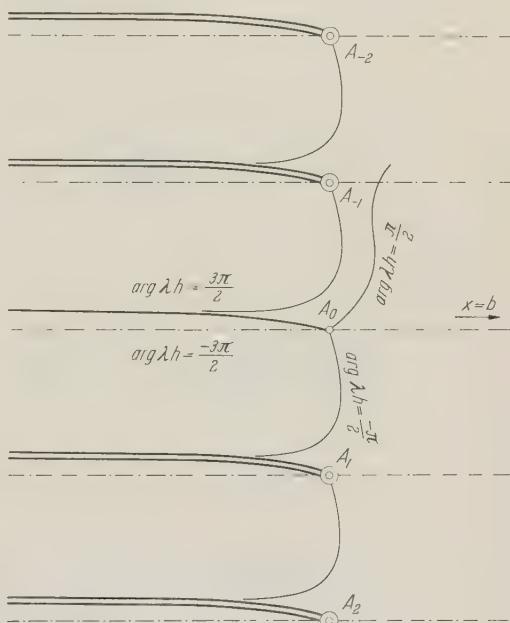


Fig. 10. Region of validity for  $Y_\beta$  in the complex  $\eta$ -plane

Here the curve  $\arg \lambda h = \frac{3}{2}\pi$  and its counterpart in the other Riemann sheets represents the limit of validity in all sheets of the complex  $x$ -plane. The representation thus obtained is identical with (8). Fig. 11 shows the limit of the validity of this equation in the complex  $x$ -plane. The middle part represents the sheet which contains  $A_0$ . The heavy line represents the limits of validity. By crossing the dash dot lines one arrives in other sheets, which are shown above and below.

A representation of the same kind which is applicable for the vicinity of the line  $\arg \lambda h = +\frac{3}{2}\pi$  is found by means of (15b):

$$y_I = e^{i\pi/2} g_2(1)^{1/2} e^{\lambda[g_2(1)i\pi - h_2(1)]} \times \\ \times 2e^{i\pi/4} h'(x)^{-1/2} [\cos(\lambda h(x)i - \frac{1}{4}\pi) + O(\lambda^{-1}) \cosh(\operatorname{Re}|\lambda h|)] \quad (22b)$$

$$\frac{1}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{5}{2}\pi.$$

The region of validity (as expressed by the condition for  $\arg \lambda h$ ) in the  $\eta$ -plane can easily be seen in Fig. 10. The corresponding region in the complex  $x$ -plane

is the shaded part of Fig. 12. A representation similar to Fig. 11 showing three Riemann sheets separately has been adopted.

The region of validity for  $Y_\alpha$  shown in Fig. 9 contains parts which originate from each other by a complete circuit around  $x=0$  and  $x=1$ , e.g., the points  $x=b$  and  $x=b_{-1}$ . Their behavior can be used to determine a representation for  $y_{II}$ . For a path which encircles the points  $x=0$  and the  $x=1$  in a positive sense, one finds (see [1] for details)

$$h'(x e^{2\pi i}) = e^{-i\pi} h'(x), \quad (23a)$$

$$h(x e^{2\pi i}) = 2\pi i g_2(1) - h(x). \quad (23b)$$

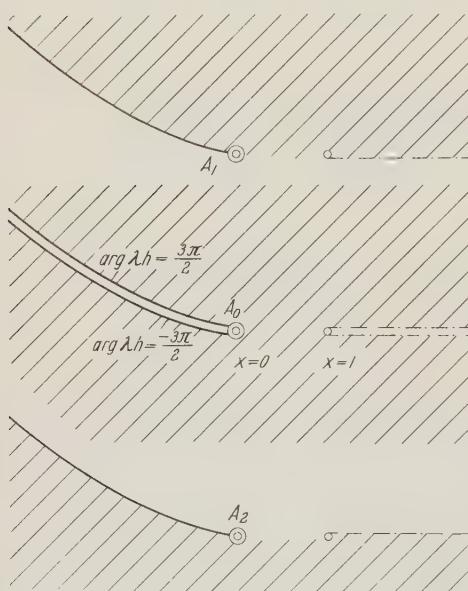


Fig. 11. Region of validity for Eq. (22a)

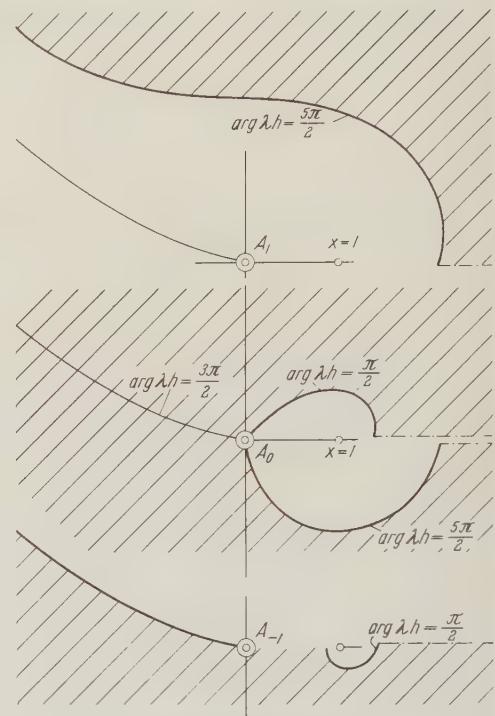


Fig. 12. Region of validity for Eq. (22b) and (28c)

Let us now consider the asymptotic solution for  $y_\alpha$ , (17), and insert into it the asymptotic expression (15a); then

$$y_\alpha(x) = h'(x)^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) \quad -\frac{5}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{1}{2}\pi. \quad (24)$$

This representation is valid in the region  $CA_{-1}A_0E$  and in the region  $EA_0A_1F$  of Fig. 9. If point  $x$  is chosen in the region  $CA_{-1}A_0E$  the point  $xe^{2\pi i}$  will lie in the region  $EA_0A_1F$ . If one considers (24) as a representation for the first region, insertion of (23) yields the following expression for the second region:

$$y_\alpha(x e^{2\pi i}) = e^{i\pi/2} e^{2\pi i \lambda g_2(1)} h'(x)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})). \quad (25)$$

$y_\alpha$  is now considered as a linear combination of  $y_I$  and  $y_{II}$ :

$$y_\alpha = c_I y_I + c_{II} y_{II}. \quad (26)$$

Applying this equation to a point  $x$  and to a point  $x e^{2\pi i}$  reached by a path encircling  $x=0$  and  $x=1$ , and inserting into the equations thus arising the above asymptotic representation, (24) and (25) for  $y_\alpha$ , one obtains

$$c_I y_I(x) + c_{II} y_{II}(x) = h'(x)^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})),$$

$$c_I y_I(x) e^{2\pi i \theta_1} + c_{II} y_{II}(x) e^{2\pi i \theta_2} = e^{\pi i/2} e^{2\pi i \lambda g_2(1)} h'(x)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})).$$

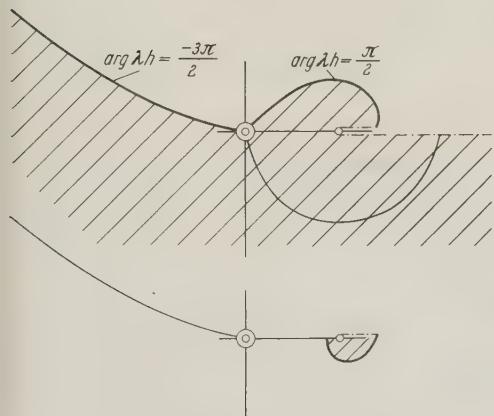
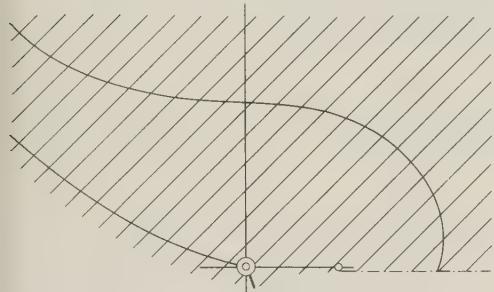


Fig. 13. Region of validity for Eq. (28a)

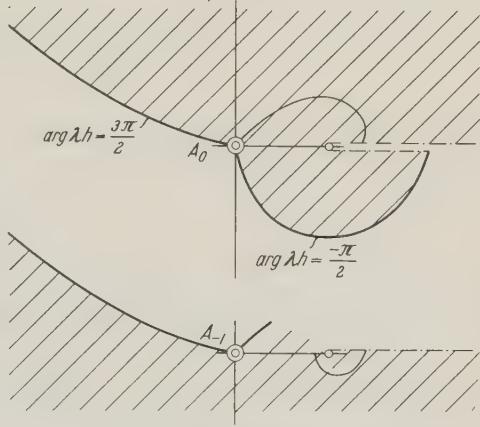
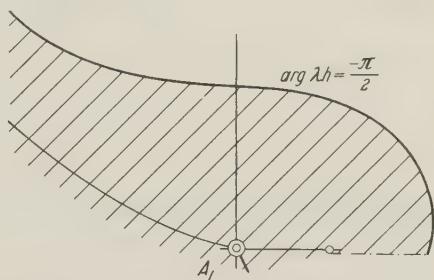


Fig. 14. Region of validity for Eq. (28b)

From this system of equations an expression for  $c_I y_I$  can be obtained and since an asymptotic expression for  $y_I$  is available in (22) one then obtains, after some manipulation, an asymptotic formula for  $y_{II}$

$$\begin{aligned} y_{II}(x) &= e^{i\pi/2} g_2(1)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(g_2(1)i\pi - h_2(1))} \left\{ Y_\alpha(x) + \frac{e^{-2\pi i \lambda g_2(1) + \pi i/2}}{2 \sinh(2\pi i \lambda g_2(1))} Y_\beta(x) \right\} + \\ &+ O(\lambda^{-\frac{1}{2}}) |h(x)|^{\frac{1}{2}} |h'(x)|^{-\frac{1}{2}} M_1 [M_2 + |\lambda|^{\frac{3}{2}} |h|^{\frac{3}{2}}]^{-\frac{1}{4}} \times \\ &\times \left\{ |e^{\lambda h_\alpha(x)}| + \left| \frac{e^{-2\pi i \lambda g_2(1)}}{2 \sinh(2\pi i \lambda g_2(1))} \right| e^{-\lambda h_\beta(x)} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

where  $h_\alpha(x)$  and  $h_\beta(x)$  are one-valued functions of  $x$ . One has

$$h_\alpha(x) \equiv h(x) \quad \text{for } -\frac{5}{2}\pi \leq \arg \lambda h \leq \frac{1}{2}\pi$$

and

$$h_\beta(x) \equiv h(x) \quad \text{for } -\frac{3}{2}\pi \leq \arg \lambda h \leq \frac{3}{2}\pi$$

$h_\alpha$  and  $h_\beta$  occur in the error terms only.

The coefficient of  $Y_\beta$  in (27) can be expressed in terms of  $\varrho_1$  and  $\varrho_2$ . Equation (27) is valid in the common region of validity of the expressions  $Y_\alpha$  and  $Y_\beta$ , Figs. 9 and 10.

Asymptotic representations for  $y_{II}$  in terms of exponential functions may also be desirable. They are obtained by inserting into (27) different asymptotic representation of the forms (15) for  $Y_\alpha$  and  $Y_\beta$ . Naturally, one must observe the regions of validity of these representations. In order to obtain overlapping regions of validity, the following three expressions are needed:

$$y_{II}(x) = e^{i\pi/2} g_2(1) e^{-\lambda(g_2(1)i\pi - h_2(1))} \times \\ \times h'(x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) + \frac{e^{-2\pi i \lambda g_2(1) - \pi i/2}}{2 \sinh(2\pi i \lambda g_2(1))} e^{-\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) \right\} \quad (28a)$$

$$-\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{1}{2}\pi.$$

The region of validity is shown in Fig. 13.

$$y_{II}(x) = e^{i\pi/2} g_2(1)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(g_2(1)i\pi - h_2(1))} \times \\ \times h'(x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) + \frac{e^{2\pi i \lambda g_2(1) - \pi i/2}}{2 \sinh(2\pi i \lambda g_2(1))} e^{-\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) \right\} \quad (28b)$$

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{3}{2}\pi.$$

The region of validity is shown in Fig. 14.

$$y_{II}(x) = e^{i\pi/2} g_2(1)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(g_2(1)i\pi - h_2(1))} (h'(x))^{-\frac{1}{2}} [2 \sinh(2\pi i \lambda g_2(1))]^{-1} \times \\ \times h'(x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{2\pi i \lambda g_2(1) + \pi i/2} e^{-\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) - e^{-2\pi i \lambda g_2(1)} e^{\lambda h(x)} (1 + O(\lambda^{-1})) \right\} \quad (28c)$$

$$\frac{1}{2}\pi < \arg \lambda h < \frac{5}{2}\pi.$$

The region of validity is the same as in Fig. 12.

### References

- [1] GUDERLEY, K. G.: Asymptotic solutions for differential equations with a regular singular point. WADC TR 58-617.
- [2] ERDÉLYI, A.: Asymptotic expansions. Dover Publications, Inc.
- [3] THORNE, R. C.: The asymptotic solution of differential equations with a turning point and singularities. Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 382-398 (1957).
- [4] THORNE, R. C.: The asymptotic solution of linear second order differential equations in a domain containing a turning point and a regular singularity. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **249**, 585-596 (1957).
- [5] KAZARINOFF, N. D., & R. MCKELVEY: Asymptotic solution of differential equations in a domain containing a regular singular point. Can. J. Math. **8**, 97-104 (1956).
- [6] CASHWELL, E. D.: The asymptotic solutions of an ordinary differential equation in which the coefficient of the parameter is singular. Pacif. J. Math. **1** 337-352 (1951).

Wright Air Development Center,  
Aeronautical Research Laboratory,  
Dayton, Ohio

(Received March 12, 1959)

# Vom Defekt ausgehende Fehlerabschätzungen bei Differentialgleichungen

JOHANN SCHRÖDER

Vorgelegt von L. COLLATZ

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit [4]<sup>1</sup> wurden Fehlerabschätzungen für Funktionen  $u^*(x)$  hergeleitet, welche auf einem  $p$ -dimensionalen Gebiet  $\mathfrak{B}$  einer Differentialgleichung

$$M[u] = f(x, u) \quad (0.1)$$

und auf dessen Rand  $\Gamma$  gegebenen Randbedingungen (oder Anfangsbedingungen oder ähnlichen Forderungen)

$$U_i[u] = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (0.2)$$

genügen. Zu diesen Abschätzungen benötigt man zwei Funktionen  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$ , die durch die Gleichungen

$$M[u_1] = f(x, u_0), \quad U_i[u_1] = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

verknüpft sind. In vielen Fällen ist es möglich, solche Funktionen zu finden (siehe die Beispiele in I), in anderen jedoch kann dies schwierig sein, insbesondere bei komplizierterem Gebiet  $\mathfrak{B}$ . Hier werden nun aus den in I bewiesenen Ergebnissen Fehlerabschätzungen hergeleitet, für die man nur eine Näherungsfunktion  $u_0(x)$  braucht und die von einer Abschätzung der Defekte

$$-M[u_0] + f(x, u_0), \quad U_i[u_0] - \gamma_i$$

ausgehen. Darüber hinaus enthält diese Mitteilung auch Eindeutigkeitsaussagen.

In Nr. 4 wird ein (als Vorschlag aufzufassender) Rechengang zur Ermittlung einer Näherung  $u_0(x)$  und zur anschließenden Fehlerabschätzung angegeben und eine Randwertaufgabe bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung danach gerechnet.

## 1. Voraussetzungen und Bezeichnungen

a) Wir verwenden die Bezeichnungen aus I, ohne sie noch einmal zu erläutern. Die in Nr. I, 2.1 genannten Voraussetzungen seien erfüllt. Außerdem gelte auf  $\overline{\mathfrak{B}} \times \overline{\mathfrak{B}}$

$$G(x, \xi) \geq 0 \quad \text{für } x \neq \xi. \quad (1.1)$$

$\mathfrak{U}$  bedeute die Menge der Funktionen  $u(x)$ , welche (auf  $\overline{\mathfrak{B}}$ ) stetig sind und die von der Lösung  $u^*(x)$  verlangten Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen.

<sup>1</sup> [4] wird im folgenden — bei Formelnummern und dgl. — als I zitiert. Die Lektüre von I wird vorausgesetzt.

Für jede feste Funktion  $u \in \mathfrak{A}$  existiere eine Lösung  $h = h[u]$  der Randwert-aufgabe

$$M[h] = 0, \quad U_i[h] = U_i[u] \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Der Einfachheit halber wollen wir ferner voraussetzen, daß die auf dem Gebiet (I, 1.3)

$$\mathfrak{G}: \quad x \in \bar{\mathfrak{B}}, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

erklärte Funktion  $f(x, y)$  und die auf (I, 1.4)

$$\tilde{\mathfrak{G}}: \quad x \in \bar{\mathfrak{B}}, \quad 0 \leq y \leq \vartheta(x)$$

definierte Majorante  $\tilde{f}(x, y)$  stetige erste Ableitungen nach  $y$  besitzen und (bei geeigneter Bezugsfunktion  $w(x)$ )

$$\tilde{f}(x, 0) = 0, \quad (1.3)$$

$$0 \leq \tilde{f}_y(x, y) \leq \tilde{f}_y(x, y') \quad \text{für } 0 \leq y \leq y', \quad (1.4)$$

$$|f_y(x, w(x) + z)| \leq \tilde{f}_y(x, |z|) \quad (1.5)$$

gilt, soweit die vorkommenden Argumentepaare in  $\tilde{\mathfrak{G}}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  liegen (vgl. Hilfsatz I, 1).

b)  $u_0(x)$  sei eine im Gebiet  $\mathfrak{G}$  verlaufende Näherungsfunktion aus  $\mathfrak{A}$  für die Lösung  $u^*(x)$  mit stetigem  $M[u_0]$ .

$$d[u_0] = -M[u_0] + f(x, u_0)$$

ist der zu  $u_0(x)$  gehörige Defekt der Differentialgleichung.

$\varrho_0(x)$  bedeute eine stetige Funktion mit

$$|u_0(x) - w(x)| \leq \varrho_0(x) \leq \vartheta(x). \quad (1.6)$$

(Ihre Existenz wird vorausgesetzt.)

c) Im Eindeutigkeitssatz 2 sind ferner gewisse Voraussetzungen erforderlich, welche bewirken, daß die Integralgleichung (3.6) der Aufgabe (3.7), (3.8) äquivalent ist:

Die Aufgabe  $M[u] = r(x), \quad U_i[u] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$

sei lösbar, wenn  $r(x)$  einer bestimmten (von der speziellen Aufgabenstellung abhängenden) linearen Menge stetiger Funktionen  $\mathfrak{J}$  angehört.  $\mathfrak{J}$  enthalte die Funktionen<sup>2</sup>

$$z = |d[u_0]|, \quad (1.7)$$

$$z = \varrho_0(x), \quad (1.8)$$

$$z = h[u] \quad \text{bei beliebigem } u \in \mathfrak{A}, \quad (1.9)$$

$$z = f(x, u(x)) \quad \text{bei beliebigem } u \in \mathfrak{J}, \quad (1.10)$$

$$z = \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad \text{bei beliebiger stetiger Funktion } u(x). \quad (1.11)$$

<sup>2</sup> Enthält  $\mathfrak{J}$  außerdem die Lösung  $u = g(x)$  der Aufgabe  $M[u] = 0, U_i[u] = \gamma_i$ , so folgt aus den Voraussetzungen dieser Nr. 1c, daß die Integralgleichung (I, 2.6) der Aufgabe (I, 2.1), (I, 2.2) äquivalent, die in Nr. I, 2.1 genannte Voraussetzung c) also erfüllt ist.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die genannten Voraussetzungen im allgemeinen für  $\mathfrak{B}$  als Menge der stetigen Funktionen erfüllt. Bei Aufgaben der in Nr. I, 3.2 behandelten Art verwendet man als  $\mathfrak{A}$  die Menge der auf  $\mathfrak{B}$  stetigen, auf  $\mathfrak{B}$  mit stetigen ersten und zweiten partiellen Ableitungen versehenen, längs  $\Gamma$  stetig differenzierbaren Funktionen  $u(x) = u(x_1, x_2)$  und als  $\mathfrak{B}$  die Menge der auf  $\mathfrak{B}$  stetigen Funktionen, welche auf  $\mathfrak{B}$  einer Hölder-Bedingung genügen. Dann sind die Funktionen (1.7) und (1.9) aus  $\mathfrak{B}$  [1], und es liegt auch die Funktion (1.8) in  $\mathfrak{B}$ , falls  $f(x, y)$  stetige erste Ableitungen besitzt.

## 2. Ergebnisse

**Satz 1.** Die in Nr. I, a und b genannten Voraussetzungen seien erfüllt, und es gebe eine Funktion  $\eta(x) \in \mathfrak{A}$  mit stetigem  $M[\eta]$  und folgenden weiteren Eigenschaften:

$$0 \leq \eta(x) \leq \vartheta(x) - \varrho_0(x), \quad (2.1)$$

$$|d[u_0]| \leq M[\eta] - \tilde{f}(x, \eta + \varrho_0) + \tilde{f}(x, \varrho_0), \quad (2.2)$$

$$|h[u_0] - g(x)| \leq h[\eta], \quad (2.3)$$

$$\varphi(x) + \eta(x) \leq u_0(x) \leq \psi(x) - \eta(x). \quad (2.4)$$

Dann besitzt die gegebene Aufgabe (0.1), (0.2) (d.h. (I, 2.1), (I, 2.2)) eine Lösung  $u^*(x)$ , und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|u^*(x) - u_0(x)| \leq \eta(x). \quad (2.5)$$

Darüber hinaus kann man aussagen, daß unter den Voraussetzungen dieses Satzes die nach (I, 1.6) gebildete Folge  $u_n(x)$  gleichmäßig gegen  $u^*(x)$  konvergiert und die Fehlerabschätzung  $|u^*(x) - u_n(x)| \leq \eta(x) + \varrho_0(x) - \varrho_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) mit den durch (I, 1.15) erklärten Funktionen  $\varrho_n(x)$  gilt.

Die Voraussetzung (2.3) ist z.B. erfüllt, falls  $u_0(x)$  den gegebenen Randbedingungen (0.2) und  $\eta(x)$  den zugehörigen homogenen Randbedingungen genügt, denn dann ist  $h[u_0] \equiv g(x)$  und  $h[\eta] \equiv 0$ . Bei partiellen Differentialgleichungen und komplizierterem Grundbereich  $\mathfrak{B}$  ist es oft praktisch nicht möglich,  $u_0(x)$  und  $\eta(x)$  so zu wählen. In vielen Fällen ist (2.3) aber auch erfüllt, wenn  $u_0(x)$  und  $\eta(x)$  auf dem Rand gewissen Ungleichungen genügen:

**Zusatz 1.** Aus

$$M[u] = 0, \quad U_i[u] \begin{cases} \geq 0 & \text{für gewisse Nummern } i = i_1, i_2, \dots \\ = 0 & \text{für } i \neq i_j \end{cases} \quad (2.6)$$

$(u(x) \in \mathfrak{A})$  folge  $u(x) \geq 0$ . Dann kann man (2.3) durch

$$|U_i[u_0] - \gamma_i| \leq U_i[\eta] \quad \text{für } i = i_1, i_2, \dots \quad (2.7)$$

$$U_i[u_0] = \gamma_i, \quad U_i[\eta] = 0 \quad \text{für } i \neq i_j$$

ersetzen<sup>3</sup>.

Nimmt  $f_y(x, y)$  in der Umgebung der Lösungsfunktion auch negative Werte an, so wirkt sich bei der Fehlerabschätzung oft ungünstig aus, daß in (1.5) der Betrag  $|f_y(x, w+z)|$  abzuschätzen ist. Man kommt jedoch sehr oft auch mit einseitigen Abschätzungen aus:

<sup>3</sup> Bei der in Nr. I, 3.2 behandelten Aufgabenklasse genügt es also, auf  $\Gamma$   $|u_0 - \gamma| \leq \eta$  zu fordern.

**Zusatz 2.** Für jede Konstante  $C \geq 0$  erfülle  $N[u] = M[u] + Cu$  die in Nr. 1a und die in Zusatz I von  $M[u]$  geforderten Voraussetzungen. Dann bleibt der Satz richtig, wenn man statt (1.5) nur

$$f_y(x, w(x) + z) \leq \tilde{f}_y(x, |z|) \quad (x, w + z \in \mathfrak{G}; x, |z| \in \tilde{\mathfrak{G}}) \quad (2.8)$$

verlangt und (2.3) durch (2.7) ersetzt<sup>4</sup>.

**Zusatz 3<sup>5</sup>.** Statt (2.4) braucht man nur zu fordern, daß

$$\text{Max} [\Phi(x), u_0(x) - \eta(x)] \geq \varphi(x), \quad \text{Min} [\Psi(x), u_0(x) + \eta(x)] \leq \psi(x) \quad (2.9)$$

gilt, wenn  $\Phi(x)$  und  $\Psi(x)$  irgendwelche Funktionen bedeuten, mit denen

$$\Phi(x) \leq g(x) + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) f(\xi, y) d\xi \leq \Psi(x) \quad (2.10)$$

für  $x, y \in \mathfrak{G}$  ist.

**Satz 2.** Die Voraussetzungen des Satzes I (bzw. die abgeänderten Voraussetzungen der Zusätze 1 und 3) und die der Nr. 1c seien erfüllt. Besitzt dann die Aufgabe

$$M[\xi] = |d[u_0]| + \tilde{f}(x, \xi + \varrho_0) - \tilde{f}(x, \varrho_0),$$

$$U_i[\xi] = U_i[\eta] \quad (i = 1, 2, \dots)$$

nur eine Lösung  $\xi(x)$  mit  $0 \leq \xi(x) \leq \eta(x)$ , so ist  $u^*(x)$  auch die einzige im Gebiet  $\mathfrak{G}$  verlaufende Lösung des gegebenen Problems (0.1), (0.2), für welche (2.5) gilt.

Satz 2 bleibt auch richtig, falls  $N[u] = M[u] + Cu$  für  $C \geq 0$  alle in Satz 2 und Zusatz 1 von  $M[u]$  geforderten Eigenschaften besitzt und man (1.5) durch (2.8) sowie (2.3) durch (2.7) ersetzt.

### 3. Beweise

Beweis des Satzes 1 und des Zusatzes 3. Wir zeigen, daß mit den Funktionen

$$u_0(x), \quad u_1(x) = g(x) + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) f(\xi, u_0(\xi)) d\xi \quad (3.1)$$

und

$$\sigma_1(x) = h[\eta] + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) |d_{\xi}[u_0]| d\xi \quad (3.2)$$

die Voraussetzungen des Satzes I, 1 erfüllt sind.

Für jede Funktion  $u \in \mathfrak{U}$  mit stetigem  $M[u]$  gilt

$$\int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) M_{\xi}[u] d\xi = u(x) - h[u]. \quad (3.3)$$

Damit ist wegen (2.3)

$$\begin{aligned} |u_1(x) - u_0(x)| &= |g(x) - h[u_0] + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) d_{\xi}[u_0] d\xi| \\ &\leq h[\eta] + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) |d_{\xi}[u_0]| d\xi = \sigma_1(x). \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Bei der gewöhnlichen Randwertaufgabe ( $M[u] = 0$ ) –  $u'' = a(x) + b(x) u$  ( $= f(x, u)$ ).  $u(0) = \alpha$ ,  $u(1) = \beta$  kann man damit  $\tilde{f} = \frac{1}{2}(|b| + b)y$  statt  $\tilde{f} = |b|y$  verwenden, und der Ansatz  $\eta = A \sin \pi x$  führt dann auf die notwendige Bedingung  $-\infty < b < \pi^2$  statt  $|b| < \pi^2$ .

<sup>5</sup> Verwendet man die Zusätze 2 und 3 gleichzeitig, so bedeuten hier  $g(x)$  und  $G(x, \xi)$  die zu  $N[u] = M[u] + Cu$  statt  $M[u]$  gehörigen Funktionen, wobei  $C$  wie im Beweis von Zusatz 2 zu wählen ist.

<sup>6</sup> Der Index  $\xi$  deutet an, daß die Differentialoperation  $d$  (bzw.  $M$  in (3.3)) auf  $u_0$  als Funktion von  $\xi$  anzuwenden ist.

Aus (2.2) und (3.3) folgt weiter

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &\leq h[\eta] + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) [M_\xi[\eta] - \tilde{f}(\xi, \eta(\xi) + \varrho_0(\xi)) + \tilde{f}(\xi, \varrho_0(\xi))] d\xi \\ &= \eta(x) - \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) [\tilde{f}(\xi, \eta(\xi) + \varrho_0(\xi)) - \tilde{f}(\xi, \varrho_0(\xi))] d\xi,\end{aligned}$$

d.h.

$$\eta(x) \geq \sigma_1(x) + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) [\tilde{f}(\xi, \eta(\xi) + \varrho_0(\xi)) - \tilde{f}(\xi, \varrho_0(\xi))] d\xi. \quad (3.4)$$

$\sigma(x) = \eta(x) - \sigma_1(x)$  genügt damit der Ungleichung (I, 4.16).

Man hat nach (3.4) auch  $\sigma(x) \geq 0$  und wegen (2.1)  $\sigma(x) \leq \vartheta(x) - \varrho_0(x) - \sigma_1(x)$ , so daß ferner  $\varrho_0(x) + \sigma_1(x) \leq \vartheta(x)$  ist. Schließlich gilt

$$u_1(x) - \sigma(x) = u_0(x) + (u_1(x) - u_0(x)) - \eta(x) + \sigma_1(x) \geq u_0(x) - \eta(x),$$

$$u_1(x) + \sigma(x) = u_0(x) + (u_1(x) - u_0(x)) + \eta(x) - \sigma_1(x) \leq u_0(x) + \eta(x),$$

so daß infolge (2.4) auch (I, 4.17) bzw. unter der Voraussetzung (2.10) auch (I, 4.20) erfüllt ist.

*Beweis des Zusatzes 1.* (2.7) bedeutet wegen  $U_i[g] = \gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned}U_i[\eta - u_0 + g] &\begin{cases} \geq 0 & \text{für } i = i_1, i_2, \dots \\ = 0 & \text{für } i \neq i_j, \end{cases} \\ U_i[\eta + u_0 - g] &\begin{cases} \geq 0 & \text{für } i = i_1, i_2, \dots \\ = 0 & \text{für } i \neq i_j. \end{cases}\end{aligned}$$

Daraus folgt nach Voraussetzung

$$h[\eta - u_0 + g] \geq 0 \quad \text{und} \quad h[\eta + u_0 - g] \geq 0$$

d.h. wegen  $h[g] = g$ :

$$|h[u_0] - g(x)| = |h[u_0 - g]| \leq h[\eta].$$

*Beweis des Zusatzes 2.* Es gebe eine Funktion  $\eta(x) \in \mathfrak{A}$  mit stetigem  $M[\eta]$ , welche den Bedingungen (2.1), (2.2), (2.4) und (2.7) genügt, wobei für  $\tilde{f}(x, y)$  nur (2.8) statt (1.5) gefordert wird, und es bedeute dann  $\hat{\varphi}(x) = u_0(x) - \eta(x)$ ,  $\hat{\psi}(x) = u_0(x) + \eta(x)$  und  $\hat{\mathfrak{G}}$  das in  $\mathfrak{G}$  enthaltene beschränkte Gebiet der Punkte  $x, y$  mit  $x \in \hat{\mathfrak{G}}$ ,  $\hat{\varphi}(x) \leq y \leq \hat{\psi}(x)$ . Wir setzen ferner  $\varphi(x, y) = Cy + f(x, y)$  und  $\tilde{\varphi}(x, y) = Cy + \tilde{f}(x, y)$  mit einer Konstanten  $C > 0$ , die so groß gewählt ist, daß in  $\hat{\mathfrak{G}}$   $\varphi_y(x, y) \geq 0$  gilt. Dann ist  $|\varphi_y(x, w(x) + z)| \leq \tilde{\varphi}_y(x, |z|)$  für  $x, w(x) + z \in \hat{\mathfrak{G}}$  und  $x, |z| \in \hat{\mathfrak{G}}$ .

Mit  $N[u]$ ,  $\varphi(x, y)$ ,  $\tilde{\varphi}(x, y)$  und  $\hat{\mathfrak{G}}$  statt  $M[u]$ ,  $f(x, y)$ ,  $\tilde{f}(x, y)$  und  $\mathfrak{G}$  sind dann alle Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, und es folgt die Existenz einer Lösung  $u^*(x)$  mit (2.5).

*Beweis des Satzes 2.* Aus (2.2), (2.3) folgt — vgl. (3.4) —  $\tau \geq \tilde{T}\tau$  mit  $\tau = \eta + \varrho_0$  und dem durch

$$\tilde{T}\varrho = \sigma_1(x) + \varrho_0(x) + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) [\tilde{f}(\xi, \varrho(\xi)) - \tilde{f}(\xi, \varrho_0(\xi))] d\xi$$

definierten Operator  $\tilde{T}$  und daraus nach Nr. I, 1.5 weiter die auf  $\mathfrak{B}$  gleichmäßige Konvergenz der durch  $\varrho_{n+1} = \tilde{T}\varrho_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) erklärten Folge  $\varrho_n$  gegen eine stetige Funktion  $\varrho^* = \tilde{T}\varrho^*$  und

$$\varrho_n(x) \leqq \varrho_{n+1}(x) \leqq \varrho^*(x) \leqq \tau(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

Für  $\zeta = \varrho^* - \varrho_0$  gilt also

$$\zeta(x) = h[\eta] + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) |d_{\xi}[u_0]| d\xi + \int_{\mathfrak{B}} G(x, \xi) [\tilde{f}(\xi, \zeta(\xi) + \varrho_0(\xi)) - \tilde{f}(\xi, \varrho_0(\xi))] d\xi. \quad (3.6)$$

Da  $\zeta(x)$  eine Summe von Funktionen der Arten (1.7), (1.9) ist, gehört  $\zeta(x)$  zu 3. Daraus folgt nach Nr. 1c weiter, daß die rechte Seite der folgenden Differentialgleichung (3.7) eine Funktion aus  $\mathfrak{B}$  und  $\zeta(x)$  daher Lösung der Aufgabe

$$M[\zeta] = |d[u_0]| + \tilde{f}(x, \zeta(x) + \varrho_0(x)) - \tilde{f}(x, \varrho_0(x)), \quad (3.7)$$

$$U_i[\zeta] = U_i[\eta] \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

ist. Außerdem hat man infolge (3.5)

$$0 \leqq \zeta(x) \leqq \eta(x). \quad (3.9)$$

Durch  $\tau_0 = \tau = \eta + \varrho_0$ ,  $\tau_{n+1} = \tilde{T}\tau_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ist eine Folge  $\tau_n$  definiert, für welche

$$\varrho^*(x) \leqq \tau_{n+1}(x) \leqq \tau_n(x) \leqq \tau(x) \quad (3.10)$$

gilt. Man beweist dies mit vollständiger Induktion, indem man  $\tau \geqq \tilde{T}\tau$  und die Monotonie des Operators  $\tilde{T}$  benutzt. Entsprechend wie in Nr. I, 1.5 die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $\varrho_n(x)$  gegen  $\varrho^* = \tilde{T}\varrho^*$  gezeigt wurde, beweist man hier, daß die Folge  $\tau_n(x)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $\varrho^{**} = \tilde{T}\varrho^{**}$  konvergiert, für welche wegen (3.10)  $\varrho^*(x) \leqq \varrho^{**}(x) \leqq \eta(x) + \varrho_0(x)$  gilt. Auch  $\zeta = \varrho^{**} - \varrho_0$  genügt den Beziehungen (3.7), (3.8) und (3.9). Daraus ergibt sich nach Voraussetzung  $\varrho^* - \varrho_0 = \varrho^{**} - \varrho_0$ . Es konvergiert also auch die Folge  $\tau_n$  gegen  $\varrho^*$ . Mit Satz 1b aus [3] folgt dann die Behauptung.

#### 4. Rechengang und numerisches Beispiel

Zur Ermittlung einer Näherungslösung  $u_0(x)$  und anschließenden Fehlerabschätzung wird (als Beispiel) der im folgenden beschriebene Rechengang vorgeschlagen. Die Rechenschritte 2 und 3 können dabei auch durch andere Methoden zur Berechnung von  $u_0$  ersetzt werden.

1. Man prüfe, ob die in Nr. 1a genannten Voraussetzungen erfüllt sind ( $f(x, y)$  wird jedoch erst im Rechenschritt 5 ermittelt) und teile die Randoperatoren  $U_i$  in zwei Klassen ( $i = i_j$ , bzw.  $i \neq i_j$ ) ein, derart daß aus (2.6)  $u(x) \geqq 0$  folgt. Nimmt man alle  $U_i$  zur zweiten Klasse ( $i \neq i_j$ ), so ergibt (2.6)  $u(x) \equiv 0$ . Die erste Klasse ( $i = i_j$ ) sollte aber im allgemeinen möglichst viele  $U_i$  umfassen. — Diesen Schritt 1 wird man nicht bei jeder einzelnen Aufgabe, sondern für gewisse Klassen von Problemen durchführen (siehe z. B. Nr. I, 3 und I, 4).

2. Ist  $f(x, y)$  in  $y$  nichtlinear, so berechne man mit dem Differenzenverfahren in Punkten  $x_k \in \mathfrak{B}$  Näherungen  $v(x_k)$  für die Funktionswerte  $u^*(x_k)$  der Lösung. Bei linearen Aufgaben entfällt dieser Rechenschritt.

3. Man mache für die Lösungsfunktion  $u^*(x)$  einen Näherungsansatz

$$u_0(x) = v_0(x) + \sum_{v=1}^m \alpha_v v_v(x) \quad (v_v(x) \in \mathfrak{A} \text{ mit stetigem } M[v_v]),$$

welcher für alle Werte der Parameter  $\alpha_v$  mindestens die Randbedingungen  $U_i[u_0] = \gamma_i$  mit  $i \neq i_j$  erfüllt. Die Parameter  $\alpha_v$  bestimme man so, daß die in  $u_0$  linearen Näherungsdefekte

$$\tilde{d}[u_0] = -M[u_0] + f(x, v(x)) + f_y(x, v(x)) (u_0(x) - v(x))$$

in den Punkten  $x_k$  und die Randdefekte

$$d_i = U_i[u_0] - \gamma_i \quad \text{für } i = i_j$$

in passend gewählten Randpunkten dem Betrage nach möglichst klein werden (soweit nicht auch die Randbedingungen mit  $i = i_j$  für alle  $\alpha_v$  erfüllt sind). Dazu benutze man etwa die Fehlerquadratmethode oder Tschebyscheffsche Approximation.

4. Man berechne die Defekte

$$d[u_0] = -M[u_0] + f(x, u_0) \quad \text{und} \quad d_i[u_0] = U_i[u_0] - \gamma_i \quad \text{für } i = i_j.$$

5. Man ermittele in einem geeignet gewählten Gebiet  $\mathfrak{G}$  eine Majorante  $\tilde{f}(x, y)$ , welche die in Nr. Ia geforderten Eigenschaften besitzt, und bestimme eine (1.6) genügende Funktion  $\varrho_0(x)$ . Im allgemeinen wird man dabei  $w(x) = u_0(x)$  und dann  $\varrho_0(x) = 0$  setzen. Sind die Voraussetzungen des Zusatzes 2 erfüllt, so braucht statt (1.5) nur (2.8) gefordert zu werden. (Zur Wahl des Gebietes  $\mathfrak{G}$  und der Majorante  $\tilde{f}(x, y)$  vgl. auch Nr. I, 2.3.)

6. Man berechne eine Lösung  $\eta(x) \geq 0$  ( $\in \mathfrak{A}$  mit stetigem  $M[\eta]$ ) der Aufgabe (2.2), (2.7) und prüfe, ob die Voraussetzungen (2.1) und (2.4) (bzw. (2.9)) erfüllt sind. Ist dies der Fall, so existiert eine Lösung  $u^*(x)$  der gegebenen Aufgabe (0.1), (0.2), und es gilt die Fehlerabschätzung (2.5).

Numerisches Beispiel. Als einfaches Beispiel rechnen wir die schon in Nr. I, 3.4 behandelte Aufgabe<sup>7</sup>

$$(M[u] =) -u'' = 3xu^2 - u^3 (= f(x, u)), \quad u(0) = \frac{1}{2}, \quad u(1) = 1.$$

1. Die in Nr. Ia genannten Voraussetzungen sind erfüllt. Man kann hier — wie meistens bei gewöhnlichen Differentialgleichungen — leicht erreichen, daß die auftretenden Funktionen die entsprechenden Randbedingungen erfüllen, kann also beide Randbedingungen zur zweiten Klasse nehmen.

2. Das übliche Mehrstellen-Differenzen-Verfahren zur Schrittweite  $h = \frac{1}{8}$  ergab die Werte  $v(x_k)$  ( $x_k = k \cdot h$ ) in der zweiten Spalte der Tabelle 1 (vgl. Nr. I, 3.1).

3. Bestimmt man in dem die Randbedingungen erfüllenden Ansatz

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(1+x) + x(1-x) \sum_{v=1}^6 \alpha_v x^{v-1}$$

die Parameter  $\alpha_v$  so, daß die Summe

$$\sum_{k=0}^8 (\tilde{d}(x_k))^2$$

<sup>7</sup> Es sei bemerkt, daß sich die in Nr. I, 3.1 hergeleitete Fehlerabschätzung verbessern läßt. Mit  $\sigma_1 = 0,0022$  erhält man dort als mögliche Schranke  $\sigma(x) = 0,0055x(1-x) \leq 0,0014$ .

mit  $\tilde{d}(x_k) = u_0''(x_k) - (6x_k v(x_k) - 3v^2(x_k)) u_0(x_k) + 3x_k v^2(x_k) - 2v^3(x_k)$   
 möglichst klein wird (Fehlerquadratmethode), so erhält man

$$\alpha_1 = 0,134285, \quad \alpha_4 = 0,036253$$

$$\alpha_2 = 0,196777, \quad \alpha_5 = 0,018504$$

$$\alpha_3 = 0,152856, \quad \alpha_6 = 0,037323$$

und die Werte  $u_0(x_k)$  in Spalte 3 der Tabelle 1.

Tabelle 1

| $8x$ | $v(x)$   | $u_0(x)$ | $\hat{u}_0(x)$ |
|------|----------|----------|----------------|
| 0    | 0,5      | 0,5      | 0,5            |
| 1    | 0,580145 | 0,580147 | 0,580146       |
| 2    | 0,661302 | 0,661307 | 0,661299       |
| 3    | 0,741769 | 0,741775 | 0,741771       |
| 4    | 0,818845 | 0,818852 | 0,818845       |
| 5    | 0,888686 | 0,888694 | 0,888683       |
| 6    | 0,946269 | 0,946277 | 0,946271       |
| 7    | 0,985564 | 0,985569 | 0,985563       |
| 8    | 1,0      | 1,0      | 1,0            |

4. Spalte 2 der Tabelle 2 enthält einige Werte des Defektes  $d[u_0]$ . Die Abbildung veranschaulicht den Verlauf dieser Funktion. Etwa bei  $x=0,055$  liegt ein Maximum, dessen Wert  $< 0,00024$  ist.

Tabelle 2

| $8x$ | $d[u_0] \cdot 10^4$ | $c_1(x)$ | $-c_2(x)$ | $c_3(x)$ | $d[\hat{u}_0] \cdot 10^4$ |
|------|---------------------|----------|-----------|----------|---------------------------|
| 0    | -0,171              | 2        | 0         | 0        | -148,19                   |
| 0,5  | 2,315               | 2        | 0,0049    | 0,0002   | -33,52                    |
| 1    | 0,783               | 2        | 163       | 13       | 9,09                      |
| 1,5  | -0,826              | 2        | 302       | 35       | 14,89                     |
| 2    | -1,201              | 2        | 434       | 66       | 6,74                      |
| 2,5  | -0,536              | 2        | 539       | 99       | 2,31                      |
| 3    | 0,407               | 1,996    | 604       | 129      | 6,44                      |
| 3,5  | 0,932               | 1,946    | 624       | 149      | 4,86                      |
| 4    | 0,726               | 1,889    | 598       | 156      | 0,21                      |
| 4,5  | 0,036               | 1,830    | 531       | 149      | 5,29                      |
| 5    | -0,605              | 1,774    | 535       | 129      | 7,08                      |
| 5,5  | -0,688              | 1,730    | 321       | 99       | 3,73                      |
| 6    | -0,130              | 1,705    | 207       | 66       | 3,96                      |
| 6,5  | 0,540               | 1,709    | 108       | 35       | 11,15                     |
| 7    | 0,281               | 1,753    | 40        | 13       | 7,06                      |
| 7,5  | -0,978              | 1,846    | 0,0006    | 0,0002   | 27,95                     |
| 8    | -0,074              | 2        | 0         | 0        | 126,90                    |

5. Wir leiten hier eine möglichst genaue Majorante her, während wir in I eine besonders einfache verwendet hatten. Die Voraussetzungen des Zusatzes 2 sind erfüllt, so daß statt (1.5) nur (2.8) zu gelten braucht. Für  $f(x, y) = 3xy^2 - y^3$

erhält man bei beliebigem  $z$

$$\begin{aligned} f_y(x, u_0 + z) &= 3u_0(2x - u_0) - 6(u_0 - x)z - 3z^2 \\ &\leq \begin{cases} 0 \\ 3u_0(2x - u_0) \end{cases} + 6(u_0 - x)|z| - 3|z|^2 = \tilde{f}_y(x, |z|) \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \xi \\ \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

mit  $\xi = \frac{1}{2}u_0(\xi) \approx \frac{1}{3}$  und

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 \\ 3u_0(2x - u_0) \end{cases} \cdot y + 3(u_0 - x)y^2 - y^3 \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \xi \\ \xi \leq x \leq 1 \end{cases}.$$



Fig. 1. Defekt  $d[u_0]$

Bei  $w = u_0$  gilt (2.8) mit dieser Funktion  $\tilde{f}(x, y)$  also für alle Punkte  $x, w(x) + z$  aus dem Gebiet

$$\mathfrak{G}: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y < \infty.$$

Im Gebiet

$$\mathfrak{G}: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \vartheta(x) = u_0(x) - x$$

besitzt  $\tilde{f}(x, y)$  außer (1.3) auch die Eigenschaft (1.4). — Man kann  $\tilde{f}(x, y)$  auch für  $0 \leq y < \infty$  erklären, muß dann aber für  $y > u_0(x) - x$  (wegen des negativen Vorzeichens bei  $y^3$ ) einen anderen analytischen Ausdruck verwenden.

### 6. Zur Lösung der Vergleichsaufgabe

$$|d[u_0]| \leq -\eta'' - \tilde{f}(x, \eta), \quad \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad (4.1)$$

machen wir den Ansatz  $\eta = A x(1-x)$  ( $A = \text{const}$ ). Die rechte Seite der Ungleichung erhält dann die Form

$$-\eta'' - \tilde{f}(x, \eta) = c_1(x) \cdot A + c_2(x) A^2 + c_3(x) \cdot A^3$$

mit Funktionen  $c_i(x)$ , von denen einige Werte in den Spalten 3 bis 5 der Tabelle 2 angegeben sind. Die durch Vernachlässigung der in  $A$  nichtlinearen Glieder entstehende Ungleichung

$$|d[u_0]| \leq c_1(x) A$$

ist für

$$A = 0,00012 = \frac{0,00024}{2} > \text{Max} \frac{|d[u_0]|}{c_1(x)}$$

erfüllt. Man stellt fest, daß auch (4.1) mit diesem Wert  $A$  gilt; die in  $A$  nichtlinearen Glieder haben nur wenig Einfluß.

Für die mit diesem Wert  $A$  gebildete Funktion  $\eta(x)$  ist auch (2.4) (bei  $\varrho_0 \equiv 0$ ) erfüllt. (2.4) braucht wegen  $\varphi = -\infty$ ,  $\psi = +\infty$  nicht nachgeprüft zu werden. Man erhält also die Fehlerabschätzung

$$|u^*(x) - u_0(x)| \leq \eta(x) = 0,00012x(1-x) \leq 0,00003.$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe wurde die am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg aufgestellte Rechenanlage IBM 650 benutzt: 1. um das System der nichtlinearen Differenzengleichungen nach einem in [2] beschriebenen Iterationsverfahren zu lösen (Rechenschritt 2), 2. um das lineare Gleichungssystem für die  $\alpha_\nu$  aufzustellen und zu lösen (Rechenschritt 3) und 3. um die Werte der Funktionen  $u_0$ ,  $d[u_0]$  und  $c_i$  zu berechnen (Rechenschritte 3, 4 und 6).

Wenn man die  $\alpha_\nu$  so bestimmt, daß

$$\sum_{k=1}^7 (u_0(x_k) - v(x_k))^2$$

möglichst klein wird, so erhält man die Werte  $\hat{u}_0(x_k)$  in Spalte 4 der Tabelle 1 und die wesentlich größeren Defekte  $d[\hat{u}_0]$  in Spalte 6 der Tabelle 2.

### Literatur

- [1] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Untersuchungen der Potentialtheorie. Enzykl. math. Wiss. II, C, 3, S. 177—377, insbesondere S. 242—244 und 286—287 (1909 bis 1921).
- [2] SCHRÖDER, J.: Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. I. Z. angew. Math. Mech. 36, 443—455 (1956).
- [3] SCHRÖDER, J.: Über das Newtonsche Verfahren. Arch. Rational Mech. Anal. 1, 154—180 (1957/58).
- [4] SCHRÖDER, J.: Fehlerabschätzungen bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Arch. Rational Mech. Anal. 2, 367—392 (1958/59).

Institut für angewandte Mathematik  
Universität Hamburg

(Eingegangen am 16. Februar 1959)

# Note on the Expansion in Powers of Poisson's Ratio of Solutions in Elastostatics

ELI STERNBERG & ROKURŌ MUKI

## Abstract

In this paper we examine the power-series development with respect to Poisson's ratio of the solution to the second boundary-value problem (surface tractions prescribed) in three-dimensional classical elastostatics for the case of vanishing body forces. The individual terms of this expansion, by means of steady-state thermoelasticity theory, are found to admit an independent physical interpretation. This interpretation, in turn, permits certain conclusions concerning the dependence upon the elastic constants of solutions to space problems. In particular, it is shown that for a body of arbitrary connectivity all stresses are independent of the elastic constants if and only if the dilatation (and the mean normal stress) is a linear function of the cartesian coordinates. The feasibility of successive approximations of solutions appropriate to sufficiently small values of Poisson's ratio is also considered.

## Development of the solution in powers of Poisson's ratio

In indicial notation, and with reference to rectangular cartesian coordinates  $x_i$ , the problem to be considered is governed by the displacement equations of equilibrium

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\sigma} u_{j,ji} = 0 \quad (1)$$

together with the stress-displacement relations

$$\tau_{ij} = \mu \left[ u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ij} u_{k,k} \right]. \quad (2)$$

Here  $u_i$  and  $\tau_{ij}$  denote the components of displacement and stress, respectively, the usual conventions for summation over repeated indices and space-differentiation being employed;  $\delta_{ij}$  stands for the Kronecker delta, while  $\mu$  and  $\sigma$  designate the shear modulus and Poisson's ratio. The field equations (1), (2), which must hold throughout the region  $\mathcal{D}$  occupied by the medium, are subject to the boundary conditions

$$\tau_{ij} l_j = t_i \quad \text{on } \mathcal{B}, \quad (3)$$

where  $l_j$  are the direction cosines of the outward normal to the boundary  $\mathcal{B}$ , whereas  $t_i$  are the components of the given surface tractions and are assumed to be functions of position alone.

In view of the manner in which the parameter  $\sigma$  enters (1) and (2), the solution to the foregoing boundary-value problem depends analytically on  $\sigma$  for  $|\sigma| < \frac{1}{2}$ . We may therefore expand the corresponding displacements and stresses as power series in  $\sigma$  in a neighborhood of  $\sigma = 0$ . Thus

$$u_i(x, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^{(n)}(x) \sigma^n, \quad \tau_{ij}(x, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{ij}^{(n)}(x) \sigma^n. \quad (4)$$

The argument  $x$  here stands for the triplet of coordinates  $(x_1, x_2, x_3)$ . Equations (4) contain no explicit reference to the shear modulus: it is clear from dimensional considerations that in the second boundary-value problem the displacements are inversely proportional to  $\mu$  while the stresses are independent of  $\mu$ . Inserting (4) in (1), (2), (3), noting that

$$\frac{1}{1-2\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} (2\sigma)^n, \quad (5)$$

and making use of the algebra of power series, we obtain

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ u_{i,jj}^{(n)} + \sum_{m=0}^n 2^{n-m} u_{j,j}^{(m)} \right] \sigma^n = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_{ij}^{(n)} \sigma^n = \mu \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [u_{i,i}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)}] \sigma^n + \delta_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{n-1} 2^{n-m} u_{k,k}^{(m)} \right] \sigma^n \right\}, \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_{ij}^{(n)} l_j \sigma^n = t_i \quad \text{on } \mathcal{B}. \quad (8)$$

Since (6), (7), (8) must hold identically in  $\sigma$ , we have

$$u_{i,jj}^{(n)} + u_{j,jj}^{(n)} = f_{i,i}^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

$$\tau_{ij}^{(n)} = \mu [u_{i,i}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)} - \delta_{ij} f_{i,i}^{(n)}] \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

$$\tau_{ij}^{(0)} l_j = t_i, \quad \tau_{ii}^{(n)} l_j = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{on } \mathcal{B}, \quad (11)$$

provided

$$f^{(0)}(x) = 0, \quad f^{(n)}(x) = - \sum_{m=0}^{n-1} 2^{n-m} u_{k,k}^{(m)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

From (9) and (12) follows

$$f_{i,i}^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

whence  $f^{(n)}(x)$  is harmonic in  $\mathcal{D}$ .

### Interpretation. Successive approximations

Let  $S(x, \sigma)$  and  $S^{(n)}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) denote the (ordered) array of  $u_i(x, \sigma)$ ,  $\tau_{ij}(x, \sigma)$  and  $u_i^{(n)}(x)$ ,  $\tau_{ij}^{(n)}(x)$ , respectively. According to (4),

$$S^{(0)}(x) = S(x, 0), \quad (14)$$

so that  $S^{(0)}(x)$  is the solution of the original problem for the special case in which POISSON's ratio vanishes, as is also confirmed by comparing (9), (10), (11)

---

<sup>1</sup> The given surface tractions were assumed to be independent of the elastic constants.

for  $n=0$  with (1), (2), (3) for  $\sigma=0$ . With a view toward a physical interpretation of  $S^{(n)}(x)$  ( $n \geq 1$ ) we recall<sup>2</sup> that (1) and (2), in the presence of a temperature field  $T(x)$ , take on the modified form

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\sigma} u_{j,ii} = \frac{2(1+\sigma)\alpha}{1-2\sigma} T_{,i}, \quad (15)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left[ u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ij} u_{k,k} - \frac{2(1+\sigma)}{1-2\sigma} \delta_{ij} \alpha T \right], \quad (16)$$

if  $\alpha$  is the coefficient of thermal expansion. A comparison of (9), (10) for  $n \geq 1$  with (15), (16) reveals that  $S^{(n)}(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) are the solutions of a sequence of boundary-value problems in steady-state thermoelasticity. Bearing in mind (11), (13) we find specifically that  $u_i^{(n)}(x)$  and  $\tau_{ij}^{(n)}(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), are the thermal displacements and stresses produced in an elastic body occupying the region  $\mathcal{D}$  by the harmonic temperature distribution  $T=f^{(n)}(x)$  in the absence of body forces and surface tractions, provided the shear modulus of the material is again  $\mu$ , Poisson's ratio  $\sigma=0$ , and the coefficient of thermal expansion  $\alpha=\frac{1}{2}$ .

Equations (9), (10), (11), which characterize  $S^{(n)}(x)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), in principle provide a systematic means for the determination of successive approximations to the solution  $S(x, \sigma)$  of the original problem in the vicinity of  $\sigma=0$ . Thus, once  $S^{(0)}(x)$  has been established,  $f^{(1)}(x)$  is known from (12) and the determination of  $S^{(1)}(x)$  becomes possible; a knowledge of  $S^{(1)}(x)$  and  $S^{(0)}(x)$ , in turn, permits the computation of  $f^{(2)}(x)$  etc. As far as the actual process of finding  $S^{(n)}(x)$  for known  $f^{(n)}(x)$  is concerned, we note that the general solution of (9) admits the representation

$$u_i^{(n)} = \varphi_i^{(n)} + x_j \psi_{j,i}^{(n)} - 3\psi_i^{(n)} \quad (17)$$

with

$$\varphi_{i,ii}^{(n)} = \frac{1}{2} f^{(n)}, \quad \psi_{j,ii}^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Equations (17), (18), except for the obvious modification needed to accommodate the temperature field  $T=f^{(n)}(x)$ , constitute the special form assumed by the PAPKOVICH-NEUBER solution<sup>3</sup> of the displacement-equations of equilibrium if  $\sigma=0$ . The boundary-value problems characterizing  $S^{(n)}(x)$  for  $n \geq 1$  may alternatively be attacked with the aid of GOODIER'S [3] method of integration of the thermoelastic field equations.

Unfortunately, the successive-approximation scheme just described holds little promise of practical significance since the actual determination of each  $S^{(n)}(x)$ , in general, is not apt to be appreciably simpler than the task of finding  $S(x, \sigma)$  explicitly. The application of the present approach to the three-dimensional treatment of the plane problem appears particularly inviting at first sight: in this instance  $S^{(0)}(x)$  is available beforehand from the associated plane-strain solution<sup>4</sup> and one may expect  $S^{(1)}(x)$  to supply useful three-dimensional corrections provided  $\sigma$  is sufficiently small. Yet, the particular difficulties peculiar to the determination of the three-dimensional solution  $S(x, \sigma)$  of the plane problem are also encountered in connection with  $S^{(n)}(x)$  for  $n \geq 1$ .

<sup>2</sup> See, for example, MELAN & PARKUS [1]. Numbers in brackets refer to the list of references at the end of this paper.

<sup>3</sup> See, for example, SOKOLNIKOFF [2], p. 330.

<sup>4</sup> Recall that the plane-strain solution is the exact three-dimensional solution of the plane problem for  $\sigma=0$ .

### Influence of the elastic constants on the stresses

The physical interpretation of the coefficients in the expansion (4) arrived at earlier permits certain conclusions regarding the dependence on the elastic constants of the solution  $S(x, \sigma)$  to the second boundary-value problem for vanishing body forces.

We prove first that all stresses belonging to  $S(x, \sigma)$  are independent of the elastic constants if and only if the dilatation  $u_{k,k}$  (and thus<sup>5</sup> the first invariant of stress  $\tau_{kk}$ ) is a linear function of the cartesian coordinates  $(x_1, x_2, x_3)$ . If the region  $\mathcal{D}$  is simply connected, this theorem follows at once from the characterization of the stress field  $\tau_{ij}(x, \sigma)$  through the stress equations of equilibrium and compatibility

$$\tau_{ij,j} = 0, \quad \tau_{ij,kk} + \frac{1}{1+\sigma} \tau_{kk,ij} = 0 \quad (19)$$

in conjunction with the boundary conditions (3). Moreover, the condition  $\tau_{kk,ij}=0$  clearly remains *necessary* for  $\tau_{ij}$  to be independent of  $\sigma$  even if  $\mathcal{D}$  is multiply connected. Here, however, the *sufficiency* of this condition cannot be inferred from (19), (3) which then no longer determine the stresses completely but must be supplemented by the requirement of single-valued displacements. To show that  $\tau_{kk,ij}=0$ , i.e.  $u_{k,kij}=0$ , assures the independence of the stresses of the elastic constants regardless of the connectivity of  $\mathcal{D}$ , we note from (4) that  $u_{k,kij}=0$  implies  $u_{k,kij}^{(n)}=0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Hence, because of (12),  $f_{ij}^{(n)}=0$ , so that the temperature fields  $f^{(n)}(x)$  are linear functions of  $(x_1, x_2, x_3)$  for  $n \geq 1$ . Now, according to a well known theorem in steady-state thermo-elasticity theory, the thermal stresses produced by a temperature distribution  $T(x)$ , in the absence of loads, vanish identically if (and only if)  $T(x)$  is linear<sup>6</sup>. Consequently, and by virtue of (11),  $\tau_{ij}^{(n)}(x)=0$  for  $n \geq 1$ . The second of (4) therefore yields that  $\tau_{ij}(x, \sigma)=\tau_{ij}^{(0)}(x)$ , whence  $\tau_{ij}$  is independent of  $\sigma$ .

In view of the second of (19),  $\tau_{kk,ij}=0$  is equivalent to  $\tau_{ij,kk}=0$ , and we may conclude that the stress field of  $S(x, \sigma)$  does not involve the elastic constants if and only if all cartesian components of stress are harmonic (rather than merely biharmonic) functions of position. In these circumstances, the maximum principle for harmonic functions predicts that each stress component  $\tau_{ij}$  attains its maximum and minimum on the boundary. According to a result of PÓLYA [4], the harmonicity of all  $\tau_{ij}$  guarantees further that the maximum and minimum values of the principal stresses, as well as the maximum of the total strain energy density, along with the maxima of the energy densities of volume change and of distortion, all occur on the boundary<sup>7</sup>. The problem of SAINT-VENANT torsion probably affords the most significant illustration of the type of degeneracy under discussion.

<sup>5</sup> Recall that  $\tau_{kk}=[2\mu(1+\sigma)/(1-2\sigma)]u_{k,k}$ , as is apparent from (2).

<sup>6</sup> See [1], p. 9. The proof given in [1] applies only to simply connected regions. To complete the argument for multiply connected regions it suffices to observe that if  $T(x)=c_0+c_i x_i$ , with  $c_0, c_i$  constant, the single-valued displacement field  $u_i=\alpha(c_0 x_i - \frac{1}{2} c_i x_j x_j + c_j x_j x_i)$  generates vanishing stresses in the sense of (16).

<sup>7</sup> Thus, in particular, if the stresses do not involve the elastic constants, plastic deformation must initiate at a point of the boundary provided the material obeys the HENCKY-MISES yield condition.

It is evident from the preceding remarks that the complete absence of the elastic constants from the stress distribution is characteristic of an exceedingly narrow class of three-dimensional problems in elastostatics. This state of affairs is in marked contrast to the two-dimensional theory of generalized plane stress where all stresses are independent of the elastic constants for a wide variety of physically important problems<sup>8</sup>. We turn, finally, to examples of space problems in which the stresses may be predicted to be partly independent of the elastic constants with the aid of the present analysis. Consider an elastic body occupying the half-space  $x_1 \geq 0$  or an infinite elastic slab bounded by the planes  $x_1 = \pm h$ . In either case let an arbitrary finite portion of the boundary be subjected to given normal and shearing tractions, while all stresses are required to vanish at infinity<sup>9</sup>. Here  $\tau_{kk}(x, \sigma)$ , and thus  $u_{k,k}(x, \sigma)$ , must tend to zero at infinity; consequently, by (4), the same is true of  $u_{k,k}^{(n)}(n=0, 1, 2, \dots)$  and hence also of the temperature fields  $f^{(n)}(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) defined by (12). On the other hand, it was shown in [7] and [8] that a harmonic temperature distribution, vanishing at infinity, applied to either of the two regions under consideration, gives rise to a thermal-stress field that is plane and parallel to the boundary<sup>10</sup>. Hence  $\tau_{1i}^{(n)}(x) = 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ), and (4) insures that the transverse stresses  $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$  are independent of the elastic constants in both problems at hand. This prediction is in agreement with the known general solution for the semi-infinite body under distributed surface loads<sup>11</sup>; it is also consistent with special results for the problem of the slab due to SNEDDON [11] and MUKI [12].

These limited conclusions concerning the influence of the elastic constants on the stresses in elastic solids are perhaps of some interest in three-dimensional experimental stress analysis, in connection with questions attached to the transition from model to prototype. Considerations of this kind are also relevant to the stress analysis of viscoelastic materials in view of the correspondence principle<sup>12</sup> that links the linear theories of elasticity and viscoelasticity.

The results communicated in this paper were obtained in the course of an investigation conducted under Contract Nonr 562(25) of Brown University with the Office of Naval Research, Washington, D.C.

### References

- [1] MELAN, E., & H. PARKUS: Wärmespannungen. Vienna: Springer 1953.
- [2] SOKOLNIKOFF, I. S.: Mathematical Theory of Elasticity, Second Ed. New York: McGraw-Hill 1956.
- [3] GOODIER, J. N.: On the integration of the thermo-elastic equations. Phil. Mag. **23**, 1017 (1937).
- [4] PÓLYA, G.: Liegt die Stelle der größten Beanspruchung an der Oberfläche? Z. angew. Math. Mech. **10**, 353 (1930).
- [5] MICHELL, J. H.: On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. Proc. London Math. Soc. **31**, 100 (1899).

<sup>8</sup> Cf. the strong theorem of MICHELL [5]. An extension of MICHELL's theorem to certain inelastic materials was given recently by BUDIANSKY [6].

<sup>9</sup> In the case of the slab the loading prescribed on  $x_1 = \pm h$  must therefore be self-equilibrated.

<sup>10</sup> This degeneracy was established independently by MUKI [9].

<sup>11</sup> See LOVE [10], art. 166.

<sup>12</sup> See, for example, LEE [13].

- [6] BUDIANSKY, B.: Extension of MICHELL's theorem to problems of plasticity and creep. *Quart. Appl. Math.* **16**, 307 (1958).
- [7] STERNBERG, E., & E. L. McDOWELL: On the steady-state thermoelastic problem for the half-space. *Quart. Appl. Math.* **14**, 381 (1957).
- [8] KOTTER, W. T., & E. STERNBERG: Discussion of a paper by B. SHARMA. *J. Appl. Mech.* **24**, 487 (1957).
- [9] MUKI, R.: Thermal stress in a semi-infinite solid and a thick plate under steady distribution of temperature. *Proc., Fac. Engineering, Keio Univ.* **9**, 10 (1956).
- [10] LOVE, A. E. H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Fourth Ed. Dover, New York 1944.
- [11] SNEDDON, I. N.: The elastic stresses produced in a thick plate by the application of pressure to its free surface. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **42**, 260 (1946).
- [12] MUKI, R.: On the SNEDDON's method by Hankel transforms for the three-dimensional problem of elasticity theory. *Proc. Fifth Japan Cong. Appl. Mech.*, 119.
- [13] LEE, E. H.: Stress analysis in visco-elastic bodies. *Quart. Appl. Math.* **13**, 183 (1955).

Brown University  
Providence, Rhode Island

(Received February 26, 1959)

# Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung

ERICH MARTENSEN

Vorgelegt von H. GÖRTLER

## § 1. Einleitung

Zur Berechnung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung an endlich oder abzählbar unendlich vielen Hindernissen in einer zweidimensionalen Potentialströmung gibt es eine Reihe von Arbeiten, in denen das Problem durch Anordnen von Singularitäten im Inneren der Hindernisse behandelt wird. Bei dieser Methode besteht jedoch die wesentliche Schwierigkeit, auf die wohl zuerst VON KÁRMÁN [1] aufmerksam gemacht hat, darin, daß sich die wirkliche Potentialströmung des Außengebietes im allgemeinen nicht bis an den a priori festgesetzten Ort der Singularitäten im Inneren analytisch fortsetzen läßt. Mit wachsender Zahl der Freiheitsgrade einer solchen Singularitätenanordnung oder -belegung konvergiert das zugehörige Strömungsfeld daher im allgemeinen auch nicht gegen die gesuchte Lösung des Problems, selbst wenn es mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade gelingt, Stromlinien durch eine beliebige Anzahl von Punkten der gegebenen Berandungen hindurchzuführen. Insbesondere bekommt man bei derartigen Verfahren keinen Anhalt für den Fehler, mit dem eine bestimmte Näherung behaftet ist.

Die beschriebene Schwierigkeit hat wahrscheinlich erstmals PRAGER [2] im Falle eines umströmten Einzelprofils dadurch vermeiden können, daß er ausschließlich die Profilkontur mit Singularitäten, und zwar nur mit Wirbeln belegt, da Quellen auf der Berandung die Umströmungsbedingung verletzen würden. Als weiterer Vorteil dieser Methode erweist sich, daß diejenige Wirbelbelegung, die die Randbedingung erfüllt, gleichzeitig mit der gesuchten Strömungsgeschwindigkeit am Profil identisch ist<sup>1</sup>. Auf diese Weise führt PRAGER das Problem auf die Auflösung einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art für die (exakte) Geschwindigkeitsverteilung am Profil zurück, die ihrerseits mit der gesuchten Druckverteilung in bekannter Weise durch die Bernoullische Gleichung verknüpft ist.

<sup>1</sup> Diesen Zusammenhang hat schon vorher PRANDTL [3] unter etwas allgemeineren Voraussetzungen hergeleitet und folgendermaßen beschrieben: „Man denke sich das Innere des Körpers durch ruhende Flüssigkeit von dem Druck  $p_0 + q$ , wie er im Staupunkt herrscht, ersetzt; dadurch tritt an die Stelle der Körperoberfläche eine Wirbelschicht mit einem Geschwindigkeitssprung von dem Betrage  $v$ . Diese Wirbelschicht ist das gesuchte gebundene Wirbelsystem.“

Die Methode der ausschließlichen Wirbelbelegung des Randes ist auch zur Behandlung eines Gitterprofils (Abb. 1) in zweidimensionaler Potentialströmung herangezogen worden. GOLDSTEIN und JERISON [4] entwickelten auf dieser Grundlage ein Verfahren zur Bestimmung einer Gitterkontur mit vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung, während ISAY [5] bei gegebenem Profil eine Integralgleichung erster Art für die Wirbelbelegung aufgestellt hat. ISAY kann die Existenz von Lösungen dieser Integralgleichung und die Konvergenz eines Iterationsverfahrens zur praktischen Bestimmung der Lösungen jedoch nur beweisen, wenn eine bestimmte Ungleichung, in die nur die Gittergeometrie eingeht, erfüllt ist. Es liegt daher nahe, in Anlehnung an die Pragersche Arbeit [2] eine Integralgleichung zweiter Art für Gitterprofile herzuleiten und zu untersuchen. Dies soll in der vorliegenden Arbeit geschehen. Es zeigt sich, daß die Frage der Existenz von Lösungen dann ganz allgemein durch die Fredholmsche Theorie [6], [7], [8] beantwortet werden kann. Die Identität von Wirbelbelegung und Geschwindigkeitsverteilung wird dabei nicht vorausgesetzt und überdies der Begriff der Wirbelbelegung ganz vermieden.

Zur numerischen Auflösung der erhaltenen Integralgleichung könnte man eines der bekannten und sehr genauen Verfahren von NYSTRÖM [9], [10], [11] heranziehen, die z.B. auf der Gaußschen oder Tschebyscheffschen Quadraturformel beruhen. Es soll jedoch für ein derartiges Verfahren die bequemere Rechteckformel verwendet werden, da diese im Falle periodischer Funktionen die gleiche Genauigkeit wie die Gaußsche Formel besitzt [12]. An Hand von Beispielen wird gezeigt, daß das Berechnungsverfahren numerische Näherungen liefert, die mit kleiner werdender Schrittweite sehr schnell gegen die strenge Lösung konvergieren.

## § 2. Formulierung des Problems und unmittelbare Folgerungen

Das gegebene Gitterprofil (Fig. 1) bestehe aus kongruenten, einfach zusammenhängenden Innengebieten  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_{+1}, \mathfrak{B}_{-1} \dots$  mit doppelpunktfreien, stetig gekrümmten Berandungen  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1} \dots$ , die mit gleichem Abstand  $t > 0$  („Gitterteilung“) in  $y$ -Richtung angeordnet sind. Die  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1} \dots$  sollen sich gegenseitig weder berühren noch überschneiden. Die Abszissen der Berandungen  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1} \dots$  gehören sämtlich dem Intervall  $a_- \leq x \leq a_+$  an. Die Menge aller Punkte der  $(x, y)$ -Ebene, die weder zu  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_{+1}, \mathfrak{B}_{-1} \dots$  noch zu  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1} \dots$  gehören, bezeichnen wir als Außengebiet  $\mathfrak{A}$ . Es gibt immer eine Parameterdarstellung  $x(\varphi), y(\varphi)$  für  $\mathfrak{C}_0$  mit folgenden Eigenschaften:

$x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  sind zweimal stetig differenzierbar für alle  $\varphi$ ;

$x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  sind periodisch in  $2\pi$ ;

$x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  durchlaufen die Berandung  $\mathfrak{C}_0$  mit wachsendem  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi$  genau einmal im Gegenurzeigersinn;

für alle  $\varphi$  verschwinden die Ableitungen  $\dot{x}(\varphi)$  und  $\dot{y}(\varphi)$  nicht gleichzeitig:

$$(1) \quad [\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2 > 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen sind alle „Stromfunktionen“  $\Psi(x, y)$ , die den folgenden Bedingungen genügen, gesucht:

$\Psi(x, y)$  ist eindeutig und zweimal stetig differenzierbar in  $\mathfrak{A}$ ;

$\Psi(x, y)$  ist eine in  $\mathfrak{A}$  harmonische Funktion:

$$(2) \quad \Delta \Psi = 0;$$

in  $\mathfrak{A}$  besitzt  $\Psi(x, y)$  die Periodizitätseigenschaften

$$(3) \quad \Psi_x(x, y + t) = \Psi_x(x, y), \quad \Psi_y(x, y + t) = \Psi_y(x, y);$$

$\partial \Psi / \partial n^1$  ist stetig auf  $\mathfrak{C}_0$ ;

$\mathfrak{C}_0$  ist Stromlinie, d.h. auf  $\mathfrak{C}_0$  gilt

$$(4) \quad \Psi(x, y) = \text{const};$$

für ein Intervall  $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$  existieren die beiden Grenzwerte

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ e^{\mp \frac{2\pi x}{t}} \Psi_x(x, \eta) \right] = 0^3$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz.

Der Zusammenhang mit der Strömungsgeschwindigkeit  $v(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  ist in  $\mathfrak{A}$  und auf  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1} \dots$  gegeben durch<sup>4</sup>

$$(6) \quad v = \text{rot}(\Psi \mathbf{f}) = [\text{grad } \Psi, \mathbf{f}];$$

in Komponenten zerlegt:

$$(7) \quad v_x = \Psi_y, \quad v_y = -\Psi_x.$$

Mit (2) folgt  $\text{div } v = 0$  und  $\text{rot } v = 0$  in  $\mathfrak{A}$ .

Sei ferner  $t$  der in Gegenuhzeigersinn gerichtete Tangentialeinheitsvektor von  $\mathfrak{C}_0$ , so gibt, da  $\mathfrak{C}_0$  Stromlinie ist,

$$(8) \quad v = (v, t)$$

die Geschwindigkeitsverteilung auf  $\mathfrak{C}_0$  an und ist positiv oder negativ, je nachdem die Umströmung an der betreffenden Stelle im Gegenuhzeiger- oder Uhrzeigersinn erfolgt<sup>5</sup>. Man bekommt aus (6) und (8)

$$v = ([\text{grad } \Psi, \mathbf{f}], t) = (\text{grad } \Psi, [t, t]);$$

da  $[t, t]$  nach innen gerichteter Normaleneinheitsvektor ist, folgt

$$(9) \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

auf  $\mathfrak{C}_0$ ;  $v$  ist auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig. In üblicher Weise beschreibt

$$(10) \quad \Gamma = \int_{\mathfrak{C}_0} v \, ds = - \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, ds$$

die Zirkulation um  $\mathfrak{C}_0$ .

<sup>1</sup>  $\partial / \partial n$  soll stets die Differentiation in Richtung der äußeren Normalen einer geschlossenen Kurve bedeuten.

<sup>2</sup> Es genügt, für  $y$  irgendeinen bestimmten Wert anzunehmen, da dann aus (3) sofort die Gültigkeit von (5) für alle  $y$  folgt.

<sup>3</sup> Durch diese Bedingung werden z.B. solche (harmonischen und periodischen) Funktionen ausgeschlossen, die sich im Unendlichen wie  $\mathfrak{C}_0 \cdot \frac{2\pi x}{t} \sin \frac{2\pi y}{t}$  verhalten.

<sup>4</sup>  $i, j, t$  sind im folgenden die Einheitsvektoren in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung.

<sup>5</sup> Die Definition des Vorzeichens befindet sich hier in Übereinstimmung mit PRAGER [2]; sie ist in der Literatur nicht einheitlich.

Wir stellen im folgenden einige Eigenschaften der zugrunde liegenden Funktionenklasse  $\Psi(x, y)$  zusammen.

**Satz 1.** Der über irgendeinem Periodenstreifen genommene Mittelwert von  $v$  ist rechts bzw. links vom Gitter jeweils gleich einer vektoriellen Konstanten  $v_{\pm\infty} = (v_{\pm\infty, x}, v_{\pm\infty, y})$  bzw.  $v_{-\infty} = (v_{-\infty, x}, v_{-\infty, y})$ , d.h. für alle  $Z > 0$  und alle  $y$  gilt

$$(14) \quad \frac{1}{t} \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} v(a_{\pm} \pm Z, \eta) d\eta = v_{\pm\infty}.$$

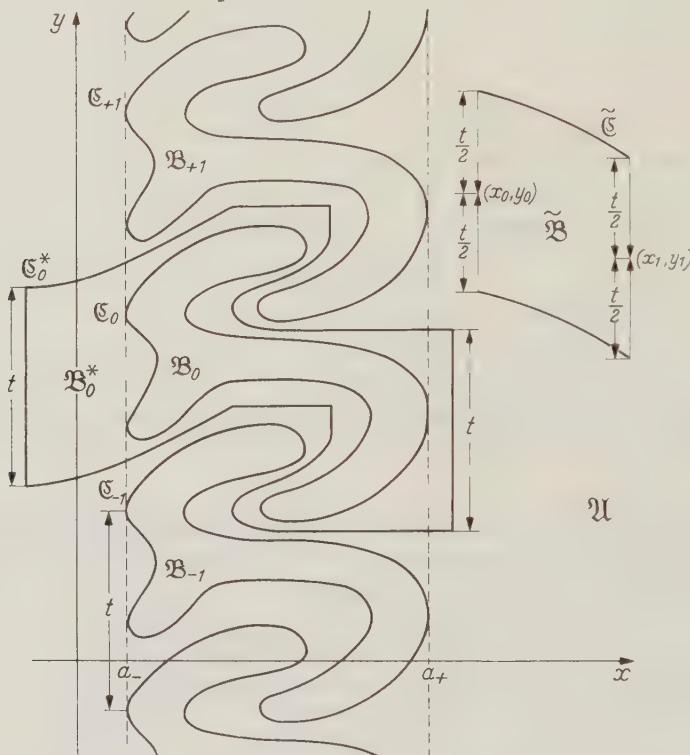


Fig. 1. Gitterprofil mit Integrationswegen  $\tilde{\mathfrak{C}}$  und  $\mathfrak{C}_0^*$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst ein rechts vom Gitter gelegenes einfache zusammenhängendes Gebiet  $\tilde{\mathfrak{B}}$  mit doppelpunktfreier, stückweise glatter Berandung  $\tilde{\mathfrak{C}}$ ; oberer und unterer Teil von  $\tilde{\mathfrak{C}}$  sollen kongruent sein und in entsprechenden Punkten voneinander den Abstand  $t$  haben (Fig. 1). Dann ergibt sich bei Beachtung der Periodizitätseigenschaften (3) die  $x$ -Komponente in (11) mit Hilfe von Fig. 1 aus der Eindeutigkeit von  $\Psi(x, y)$ :

$$\frac{1}{t} \int_{y_1 - \frac{t}{2}}^{y_1 + \frac{t}{2}} v_x(x_1, \eta) d\eta - \frac{1}{t} \int_{y_0 - \frac{t}{2}}^{y_0 + \frac{t}{2}} v_x(x_0, \eta) d\eta = \frac{1}{t} \int_{\tilde{\mathfrak{C}}} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 0^1;$$

<sup>1</sup>  $\partial/\partial s$  soll stets die in Gegenurzeigersinn gerichtete tangentiale Differentiation auf einer geschlossenen Kurve sein.

die  $y$ -Komponente in (11) ist eine Folge des Gaußschen Integralsatzes:

$$\frac{1}{t} \int_{y_1 - \frac{t}{2}}^{y_1 + \frac{t}{2}} v_y(x_1, \eta) d\eta - \frac{1}{t} \int_{y_0 - \frac{t}{2}}^{y_0 + \frac{t}{2}} v_y(x_0, \eta) d\eta = -\frac{1}{t} \int_{\tilde{\mathfrak{C}}} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = -\frac{1}{t} \iint_{\tilde{\mathfrak{B}}} \Delta \Psi dx dy = 0.$$

Entsprechend gestaltet sich der Beweis für die Verhältnisse links vom Gitter.

**Satz 2.** Zwischen den zu beiden Seiten des Gitters genommenen Mittelwerten von  $v$  besteht die „Umlenkformel“

$$(12) \quad v_{+\infty} - v_{-\infty} = \frac{\Gamma}{t} j.$$

*Beweis.* Das zweifach zusammenhängende Gebiet  $\mathfrak{B}_0^*$  werde von  $\mathfrak{C}_0^*$  und  $\mathfrak{C}_0$  berandet;  $\mathfrak{C}_0^*$  habe dieselben Eigenschaften wie  $\tilde{\mathfrak{C}}$ ; außerdem sollen  $\mathfrak{C}_0^*$  und  $\mathfrak{C}_0$  keinen gemeinsamen Punkt besitzen (Fig. 1). Sodann findet man mit Hilfe von (10) und (11)

$$\begin{aligned} v_{+\infty, x} - v_{-\infty, x} &= \frac{1}{t} \int_{y_1 - \frac{t}{2}}^{y_1 + \frac{t}{2}} v_x(x_1, \eta) d\eta - \frac{1}{t} \int_{y_0 - \frac{t}{2}}^{y_0 + \frac{t}{2}} v_x(x_0, \eta) d\eta = \frac{1}{t} \int_{\mathfrak{C}_0^*} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 0, \\ v_{+\infty, y} - v_{-\infty, y} &= \frac{1}{t} \int_{y_1 - \frac{t}{2}}^{y_1 + \frac{t}{2}} v_y(x_1, \eta) d\eta - \frac{1}{t} \int_{y_0 - \frac{t}{2}}^{y_0 + \frac{t}{2}} v_y(x_0, \eta) d\eta \\ &= -\frac{1}{t} \int_{\mathfrak{C}_0^*} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = -\frac{1}{t} \iint_{\mathfrak{B}_0^*} \Delta \Psi dx dy - \frac{1}{t} \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \frac{\Gamma}{t}. \end{aligned}$$

Es ist im Hinblick auf das folgende nützlich, einen konstanten Vektor  $v_\infty = (v_{\infty, x}, v_{\infty, y})$  durch

$$(13) \quad v_\infty = \frac{1}{2} (v_{+\infty} + v_{-\infty})$$

zu definieren; dann gilt mit (12) und (13)

$$(14) \quad v_{\pm\infty} = v_\infty \pm \frac{\Gamma}{2t} j.$$

Weiter findet man aus (7) und den  $x$ -Komponenten von (11) und (14) zunächst für alle  $Z > 0$  und alle  $y$

$$\frac{1}{t} \left[ \Psi \left( a_\pm \pm Z, y + \frac{t}{2} \right) - \Psi \left( a_\pm \pm Z, y - \frac{t}{2} \right) \right] = v_{\infty, r};$$

integriert man nun  $\partial\Psi/\partial s$  über irgendein Teilstück der Berandung  $\mathfrak{C}_0^*$  (Fig. 1) mit den Endpunkten  $(x, y)$  und  $(x, y+t)$ , so erhält man ganz allgemein in  $\mathfrak{A}$

$$(15) \quad \Psi(x, y+t) = \Psi(x, y) + t v_{\infty, x}.$$

**Satz 3.** Der über irgendeinem Periodenstreifen genommene Mittelwert von  $\Psi - x\Psi_x - v_{\infty, x}y$  ist rechts bzw. links vom Gitter jeweils gleich einer Konstanten

$c_{+\infty}$  bzw.  $c_{-\infty}$ , d.h. für alle  $Z > 0$  und alle  $y$  gilt

$$(16) \quad \frac{1}{t} \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} [\Psi(a_{\pm} \pm Z, \eta) - (a_{\pm} \pm Z) \Psi_x(a_{\pm} \pm Z, \eta) - v_{\infty, x} \eta] d\eta = c_{\pm \infty}$$

oder hiermit gleichbedeutend

$$(17) \quad \frac{1}{t} \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} [\Psi(a_{\pm} \pm Z, \eta) - (a_{\pm} \pm Z) \Psi_x(a_{\pm} \pm Z, \eta)] d\eta - v_{\infty, x} y = c_{\pm \infty}.$$

*Beweis.* Wir betrachten das Gebiet  $\tilde{\mathfrak{B}}$  mit der Berandung  $\tilde{\mathfrak{C}}$  in Fig. 1 und bekommen auf Grund des Greenschen Satzes und Gleichung (15)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_{y_1 - \frac{t}{2}}^{y_1 + \frac{t}{2}} [\Psi(x_1, \eta) - x_1 \Psi_x(x_1, \eta)] d\eta - v_{\infty, x} y_1 - \frac{1}{t} \int_{y_0 - \frac{t}{2}}^{y_0 + \frac{t}{2}} [\Psi(x_0, \eta) - x_0 \Psi_x(x_0, \eta)] d\eta + v_{\infty, x} y_0 \\ &= \frac{1}{t} \int_{\tilde{\mathfrak{C}}} \left( \Psi \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds - \frac{1}{t} \int_{\tilde{\mathfrak{C}}_{\text{oben}}} [\Psi(x, y) - \Psi(x, y-t)] \frac{\partial x}{\partial n} ds + v_{\infty, x} \int_{\tilde{\mathfrak{C}}_{\text{oben}}} \frac{\partial y}{\partial s} ds \\ &= \frac{1}{t} \iint_{\tilde{\mathfrak{B}}} (\Psi \Delta x - x \Delta \Psi) dx dy - v_{\infty, x} \int_{\tilde{\mathfrak{C}}_{\text{oben}}} \left( \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0, \end{aligned}$$

da  $\Delta x$  und  $\Delta \Psi$  in  $\tilde{\mathfrak{B}}$  und  $\left( \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial s} \right)$  auf  $\tilde{\mathfrak{C}}_{\text{oben}}$ , dem oberen Teil von  $\tilde{\mathfrak{C}}$ , verschwindet. Entsprechend verläuft der Beweis für den Mittelwert links vom Gitter.

Im Anschluß an (16) bzw. (17) definieren wir noch

$$(18) \quad c_{\infty} = \frac{1}{2} (c_{+\infty} + c_{-\infty}).$$

Wir bezeichnen  $c_{\infty}$  und  $v_{\infty}$  als die „charakteristischen Mittelwerte“ von  $\Psi$ .

**Lemma 1.** Für jedes Intervall  $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$  existieren die beiden Grenzwerte

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[ e^{\mp \frac{2\pi x}{t}} \Psi(x, \eta) \right] = 0$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz.

*Beweis.* Für alle  $x$  aus  $a_+ < x < +\infty$  und alle  $\eta$  aus  $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$  sind  $\Psi(x, y)$  und

$$e^{-\frac{2\pi x}{t}} \Psi_x(x, \eta) = h(x, \eta)$$

voraussetzungsgemäß stetig. Da (5) im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gilt, existiert zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $a'_+ > a_+$  derart, daß

$$|h(x, \eta)| < \frac{\pi \varepsilon}{t}$$

für alle  $x \geq a'_+$  und alle  $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$  gültig ist. Ferner gibt es eine Schranke  $M > 0$ , mit der im Intervall  $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$  die Ungleichung

$$|\Psi(a'_+, \eta)| \leq M$$

erfüllt ist. Für alle

$$x \geq a''_+ = \max \left\{ a'_+, \frac{t}{2\pi} \ln \frac{3M}{\varepsilon} \right\}$$

und alle  $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{2\pi x}{t}} \Psi(x, \eta) \right| &= e^{-\frac{2\pi x}{t}} \left| \Psi(a'_+, \eta) + \int_{a'_+}^x e^{-\frac{2\pi x}{t}} h(x, \eta) dx \right| \\ &\leq e^{-\frac{2\pi x}{t}} M + e^{-\frac{2\pi x}{t}} \int_{a'_+}^x e^{-\frac{2\pi x}{t}} \frac{\pi \varepsilon}{t} dx \\ &\leq e^{-\frac{2\pi a''_+}{t}} M + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{2\pi x}{t}} \left( e^{-\frac{2\pi x}{t}} - e^{-\frac{2\pi a'_+}{t}} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

In gleicher Weise findet man den Grenzwert für  $x \rightarrow -\infty$ .

### § 3. Zusammenhang zwischen der Stromfunktion im Außengebiet und der Geschwindigkeit am Profil

**Satz 4.** Durch ihre charakteristischen Mittelwerte  $c_\infty, v_\infty$  und ihre Geschwindigkeitsverteilung  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  ist die Stromfunktion  $\Psi$  in  $\mathfrak{A}$  vollständig bestimmt durch

$$(20) \quad \Psi(x, y) = c_\infty + v_{\infty, x} y - v_{\infty, y} x + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} F v ds^1,$$

wobei

$$(21) \quad F(x, y; \xi, \eta; t) = \ln \frac{1}{\sqrt[4]{2 \left[ \operatorname{Erf} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t} \right]}}$$

und  $(\xi, \eta)$  laufender Punkt auf  $\mathfrak{C}_0$  ist.

*Beweis.* Wir schließen zunächst aus, daß der Aufpunkt  $(x, y)$  im abgeschlossenen schraffierten Gebiet in Fig. 2 liegt. Sodann betrachten wir ein dreifach zusammenhängendes Gebiet  $\mathfrak{G}$ , das von einer doppelpunktfreien, stückweise glatten Kurve  $\mathfrak{S}$ , einer den Punkt  $(x, y)$  einschließenden Kurve  $\mathfrak{K}$  und von  $\mathfrak{C}_0$  berandet wird, wobei keine dieser Berandungen mit einer anderen einen gemeinsamen Punkt besitzt (Fig. 2). Ferner seien der obere und untere Teil von  $\mathfrak{S}$  kongruent mit dem Abstande  $t$ , während  $\mathfrak{S}$  rechts und links bzw. aus den Geradenstücken

$$\xi = a'_\pm, \quad y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$$

bestehen soll; wir bezeichnen mit  $(\xi, \eta)$  stets einen laufenden Punkt in  $\mathfrak{G}$  und auf den drei Berandungen von  $\mathfrak{G}$ . Für  $\mathfrak{K}$  gelte die Parameterdarstellung

$$(22) \quad \xi(\sigma; \tau) = x + \frac{t}{\pi} \operatorname{Ar Sin} \frac{\pi \sigma \cos \tau}{t}, \quad \eta(\sigma; \tau) = y + \frac{t}{\pi} \operatorname{arc sin} \frac{\pi \sigma \sin \tau}{t}$$

<sup>1</sup> Diese Beziehung wird von GOLDSTEIN und JERISON [4] auf anderem Wege und unter weniger allgemeinen Voraussetzungen, die u.a. das Verhalten im Unendlichen betreffen, hergeleitet.

bei konstantem, hinreichend kleinem  $\sigma > 0$ ; mit wachsendem  $0 \leq \tau \leq 2\pi$  wird  $\mathfrak{K}$  genau einmal im Gegenuhzeigersinn durchlaufen. Die Funktion (21) hat auf  $\mathfrak{K}$  den konstanten Wert

$$(23) \quad F(x, y; \xi(\sigma; \tau), \eta(\sigma; \tau); t) = \ln \frac{t}{2\pi\sigma},$$

während man für die Normalableitung auf  $\mathfrak{K}$

$$(24) \quad \frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{1}{\sigma} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \cos 2\tau}$$

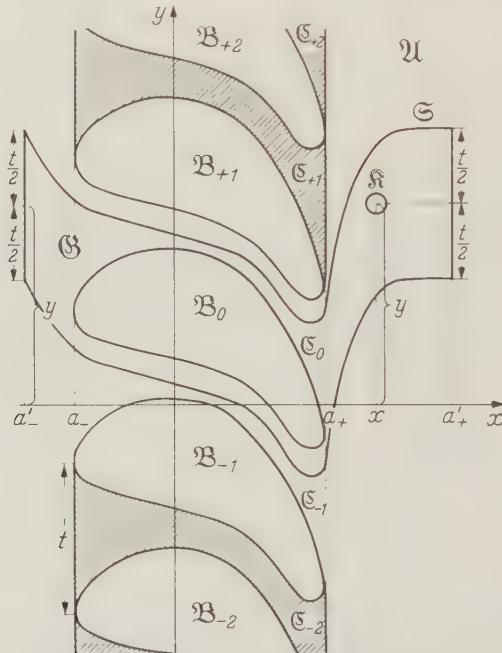


Fig. 2. Gitterprofil mit Integrationswegen  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{R}$

bekommt. Schließlich hat das Linienelement von  $\mathfrak{K}$  für wachsende  $\tau$  die Gestalt

$$(25) \quad ds = \sigma \sqrt{\frac{1 + \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \cos 2\tau}{\left(1 + \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \cos^2 \tau\right)\left(1 - \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \sin^2 \tau\right)}} d\tau.$$

Indem wir nun beachten, daß für alle Punkte  $(\xi, \eta)$  in  $\mathfrak{G}$  und auf  $\mathfrak{S}, \mathfrak{R}, \mathfrak{E}_0$

$$\operatorname{Cov} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} \cdot \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t} > 0$$

ist, können wir auf  $\Psi(\xi, \eta)$  und  $F(x, y; \xi, \eta; t)$  den Greenschen Satz anwenden und erhalten

$$(26) \quad \begin{aligned} & \iint_{\mathfrak{G}} (\Psi \Delta F - F \Delta \Psi) d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathfrak{S}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds - \int_{\mathfrak{R}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds - \int_{\mathfrak{E}_0} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = 0, \end{aligned}$$

da  $\Delta F$  und  $\Delta \Psi$  in  $\mathfrak{G}$  verschwinden. Bevor wir jetzt die drei Randintegrale über  $\mathfrak{S}, \mathfrak{R}, \mathfrak{C}_0$  einzeln untersuchen, vermerken wir noch

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= \frac{\pi}{t} \frac{\sin \frac{2\pi(x-\xi)}{t}}{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \frac{\pi}{t} \frac{\sin \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}. \end{aligned}$$

Zunächst stellt sich dann heraus, daß die Integration über den oberen und unteren Teil von  $\mathfrak{S}$  zusammen keinen Beitrag liefert; wegen (3), (15), (21) und (27) bekommt man nämlich

$$\int_{\mathfrak{S}_{\text{oben}}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds + \int_{\mathfrak{S}_{\text{unter}}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = t v_{\infty, x} \int_{\mathfrak{S}_{\text{oben}}} \frac{\partial F}{\partial n} ds;$$

da  $F$  eine harmonische Funktion ist, deren sämtliche Singularitäten an den Stellen  $(x, y), (x, y \pm t), (x, y \pm 2t) \dots$  liegen (Fig. 2), kann der Integrationsweg des rechts stehenden Integrals in eine gerade Verbindungsline der Endpunkte abgewandelt werden, und man bekommt mit (27)

$$\int_{\mathfrak{S}_{\text{oben}}} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \int_{a'_-}^{a'_+} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{\eta=y \pm \frac{t}{2}} d\xi = 0.$$

Mit (7), (11) und (17) ergibt sich weiter für den rechten Teil von  $\mathfrak{S}$

$$(28) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathfrak{S}_{\text{rechts}}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} [\Psi(a'_+, \eta) F_\xi(x, y; a'_+, \eta; t) - F(x, y; a'_+, \eta; t) \Psi_x(a'_+, \eta)] d\eta \\ &= \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} \left\{ \Psi(a'_+, \eta) \left[ F_\xi(x, y; a'_+, \eta; t) + \frac{\pi}{t} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ F(x, y; a'_+, \eta; t) - \frac{\pi}{t} (x - a'_+) \right] \Psi_x(a'_+, \eta) \right\} d\eta - \\ &\quad - \pi \left\{ \frac{1}{t} \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} [\Psi(a'_+, \eta) - a'_+ \Psi_x(a'_+, \eta)] d\eta + \frac{x}{t} \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} \Psi_x(a'_+, \eta) d\eta \right\} \\ &= \int_{y - \frac{t}{2}}^{y + \frac{t}{2}} \left[ e^{-\frac{2\pi a'_+}{t}} \Psi(a'_-, \eta) P(x, y; a'_+, \eta; t) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{2\pi a'_+}{t}} \Psi_x(a'_+, \eta) Q(x, y; a'_+, \eta; t) \right] d\eta - \\ &\quad - \pi (c_{+\infty} + v_{\infty, x} y - v_{+\infty, y} x), \end{aligned}$$

wobei wegen (21) und (27)

$$P(x, y; a'_+, \eta; t) = \frac{2\pi}{t} e^{\frac{2\pi x}{t}} \frac{e^{\frac{2\pi x}{t}} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}{1 - 2e^{\frac{2\pi(x-a'_+)}{t}} \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t} + e^{\frac{4\pi(x-a'_+)}{t}}},$$

$$Q(x, y; a'_+, \eta; t) = e^{\frac{2\pi a'_+}{t}} \ln \frac{1}{\sqrt[+]{1 - 2e^{\frac{2\pi(x-a'_+)}{t}} \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t} + e^{\frac{4\pi(x-a'_+)}{t}}}}$$

bedeuten. Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{a'_+ \rightarrow +\infty} P(x, y; a'_+, \eta; t) = -\frac{2\pi}{t} e^{\frac{2\pi x}{t}} \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t},$$

$$\lim_{a'_+ \rightarrow +\infty} Q(x, y; a'_+, \eta; t) = e^{\frac{2\pi x}{t}} \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t},$$

so daß (28) mit Hilfe der Grenzwerte (5) und (19) gleichfalls den Grenzübergang  $a_+ \rightarrow +\infty$  auszuführen gestattet<sup>1</sup>:

$$\lim_{a'_+ \rightarrow +\infty} \int_{\mathfrak{S}_{\text{rechts}}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = -\pi(c_{+\infty} + v_{\infty, x} y - v_{+\infty, y} x).$$

Entsprechend bestimmt sich

$$\lim_{a'_- \rightarrow -\infty} \int_{\mathfrak{S}_{\text{links}}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = -\pi(c_{-\infty} + v_{\infty, x} y - v_{-\infty, y} x).$$

Durch Addition der letzten beiden Gleichungen folgt bei Benutzung von (13) und (18)

$$(29) \quad \lim_{\substack{a'_+ \rightarrow +\infty \\ a'_- \rightarrow -\infty}} \int_{\mathfrak{S}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = -2\pi(c_{\infty} + v_{\infty, x} y - v_{\infty, y} x).$$

Wir wenden uns nun in (26) dem Integral über  $\mathfrak{K}$  zu und erhalten wegen (22) bis (25)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{K}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\left( 1 + \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \cos 2\tau \right) \Psi(\xi(\sigma; \tau), \eta(\sigma; \tau))}{\sqrt[+]{\left( 1 + \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \cos^2 \tau \right) \left( 1 - \frac{\pi^2 \sigma^2}{t^2} \sin^2 \tau \right)}} d\tau - \ln \frac{t}{2\pi\sigma} \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds; \end{aligned}$$

da der zweite Summand rechts auf Grund des Gaußschen Integralsatzes verschwindet, kann man den Grenzübergang  $\sigma \rightarrow 0$  ausführen:

$$(30) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{K}} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = - \int_0^{2\pi} \Psi(\xi(0; \tau), \eta(0; \tau)) d\tau = -2\pi \Psi(x, y).$$

<sup>1</sup> Die Vertauschung von Limes und Integration ist hier und im folgenden auf Grund gleichmäßiger Konvergenz des Integranden erlaubt, ohne daß in jedem Fall besonders darauf hingewiesen wird.

Für das in (26) noch verbleibende Integral über  $\mathfrak{C}_0$  bekommen wir auf Grund von (4), (9) und wiederum mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$(31) \quad \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = \text{const} \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds + \int_{\mathfrak{C}_0} F v ds = \int_{\mathfrak{C}_0} F v ds.$$

Durch Einsetzen von (29), (30) und (31) in Gleichung (26), in der die (nunmehr erlaubten) Grenzübergänge  $a'_+ \rightarrow +\infty$ ,  $a'_- \rightarrow -\infty$ ,  $\sigma \rightarrow 0$  ausgeführt zu denken sind, folgt die Behauptung (20) für alle in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Punkte  $(x, y)$ , die nicht dem abgeschlossenen schraffierten Gebiet in Fig. 2 angehören. Jedoch kann man sich die Gültigkeit auch hierfür folgendermaßen leicht klar machen. Zunächst beachten wir, daß mit (3), (4) und (9) und aus Stetigkeitsgründen  $\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0$  und  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -v$  auch auf  $\mathfrak{C}_{+1}$ ,  $\mathfrak{C}_{-1}$ ... gilt; damit ist ferner  $\Psi$  konstant und  $\partial \Psi / \partial n$  stetig auf  $\mathfrak{C}_{+1}$ ,  $\mathfrak{C}_{-1}$ .... Liegt nun z.B. der Punkt  $(x, y)$  im abgeschlossenen schraffierten Gebiet zwischen  $\mathfrak{C}_{+1}$  und  $\mathfrak{C}_{+2}$  und denken wir uns jetzt das Profil  $\mathfrak{C}_{+1}$  und  $\mathfrak{A}$  ganz im Inneren von  $\mathfrak{S}$ , so führt dieselbe Überlegung wie oben auf

$$(32) \quad \Psi(x, y) = c_\infty + v_\infty, x y - v_\infty, y x + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_{+1}} F v ds.$$

Tatsächlich gibt (20) für einen solchen Punkt  $(x, y)$  denselben Wert wie (32) an, da (21) in entsprechenden laufenden Punkten  $(\xi, \eta)$  auf  $\mathfrak{C}_0$  und  $\mathfrak{C}_{+1}$  gleich ist.

**Satz 5.** Die Strömungsgeschwindigkeit konvergiert im Unendlichen gleichmäßig gegen ihre (konstanten) Mittelwerte im Endlichen, d.h. für jedes abgeschlossene  $y$ -Intervall existieren die beiden Grenzwerte

$$(33) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{v}(x, y) = \mathfrak{v}_{\pm\infty}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz.

*Beweis.* Auf Grund von (7), (20) und (21) gilt in  $\mathfrak{A}$  ganz allgemein

$$(34) \quad \mathfrak{v}(x, y) = \mathfrak{v}_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{j} \right) v ds$$

mit

$$(35) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{\pi}{t} \frac{\sin \frac{2\pi(x-\xi)}{t}}{\operatorname{Cof} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\pi}{t} \frac{\sin \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}{\operatorname{Cof} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}. \end{aligned}$$

Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial F}{\partial x} = \mp \frac{\pi}{t},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, so daß (34) gleichfalls die Grenzübergänge  $x \rightarrow \pm \infty$  gestattet:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} v(x, y) = v_\infty \pm \frac{i}{2t} \int_{\mathfrak{C}_0} v ds = v_\infty \pm \frac{I}{2t} i;$$

in Verbindung mit (14) folgt dann die Behauptung (33).

#### § 4. Beziehungen für den Durchgang des Aufpunktes durch den Integrationsweg

**Lemma 2.** Sei  $\varrho$  irgendeine auf  $\mathfrak{C}_0$  stetige Belegungsfunktion; dann gelten für die Normalableitungen der in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}_0$  eindeutig erklärt harmonischen Funktionen

$$(36) \quad U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} F \varrho ds$$

beim Durchgang des Aufpunktes durch  $\mathfrak{C}_0$  die Sprungrelationen<sup>1</sup>

$$(37) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_a - \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\mathfrak{C}_0} = -\frac{\varrho}{2}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\mathfrak{C}_0} - \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_i = -\frac{\varrho}{2},$$

während die Funktion selbst stetig bleibt:

$$(38) \quad U|_a - U|_i = 0.$$

*Beweis.* Wir schließen an das beim Durchgang durch  $\mathfrak{C}_0$  bekannte Verhalten des in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}_0$  eindeutigen Potentials

$$(39) \quad U^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \ln \frac{t}{2\pi r} \right) \varrho ds$$

einer einfachen Belegung  $\varrho$  auf  $\mathfrak{C}_0$  an ( $r$  ist der Abstand zwischen Auf- und Integrationspunkt), wobei (37) und (38) sinngemäß gelten [13]. Es genügt dann zu zeigen, daß sich die Funktion

$$U^*(x, y) - U(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \ln \frac{t^2}{4\pi^2 r^2} - 2F \right) \varrho ds$$

mit ihren Ableitungen beim Durchgang durch  $\mathfrak{C}_0$  stetig verhält. Da ohne weiteres einzusehen ist, daß

$$(40) \quad G(x, y; \xi, \eta; t) = \ln \frac{t^2}{4\pi^2 r^2} - 2F = \ln \frac{2 \left[ \operatorname{Erf} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t} \right]}{\left[ \frac{2\pi(x-\xi)}{t} \right]^2 + \left[ \frac{2\pi(y-\eta)}{t} \right]^2}$$

für alle  $(x, y)$  aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}_0$  und für alle  $(x, y) \neq (\xi, \eta)$  auf  $\mathfrak{C}_0$  analytisch ist, bleibt lediglich der Fall zu untersuchen, daß  $(x, y)$  in einer Umgebung von  $(\xi, \eta)$  liegt. Zu diesem Zweck betrachten wir

$$(41) \quad \tilde{G}(X, Y) = \ln \frac{2(\operatorname{Erf} X - \cos Y)}{X^2 + Y^2}$$

<sup>1</sup>  $a$  und  $i$  bedeuten Außen- und Innenseite von  $\mathfrak{C}_0$ .

in einer Umgebung von  $X = Y = 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 e^{\tilde{G}(X,Y)} &= 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{X^{2\mu+2}}{(2\mu+2)!} - \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \frac{Y^{2\mu+2}}{(2\mu+2)!} \\
 (42) \quad &= 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+2)!} \frac{X^{2\mu+2} + (-1)^{\mu} Y^{2\mu+2}}{X^2 + Y^2} \\
 &= 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+2)!} \left( \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} X^{2\mu-2\nu} Y^{2\nu} \right),
 \end{aligned}$$

falls die letzte Reihe konvergiert. Dies ist in der Tat für alle komplexwertigen  $X$  und  $Y$  der Fall, da man bei Vorgabe einer reellen Zahl  $M > 0$  für alle  $|X| \leq M$ ,  $|Y| \leq M$

$$|e^{\tilde{G}(X,Y)}| \leq 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+2)!} (\mu+1) M^{2\mu} = \frac{\sin M}{M}$$

bekommt. Da die Reihenentwicklung (42) mit

$$e^{\tilde{G}(X,Y)} = 1 + \frac{1}{12} (X^2 - Y^2) + \frac{1}{360} (X^4 - X^2 Y^2 + Y^4) + \dots$$

beginnt, konvergiert beim Übergang zum Logarithmus

$$\tilde{G}(X, Y) = \frac{1}{12} (X^2 - Y^2) - \frac{1}{1440} (X^4 - 6X^2 Y^2 + Y^4) + \dots$$

in einer Umgebung von  $X = Y = 0$ . Dann ist auch  $G(x, y; \xi, \eta; t)$  in einer Umgebung von  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  analytisch und bleibt damit  $U^* - U$  einschließlich der Ableitungen beim Durchgang durch  $\mathfrak{C}_0$  stetig.

## § 5. Äquivalenz des Problems mit einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

**Satz 6.** Notwendig und hinreichend dafür, daß es zu gegebenen Konstanten  $c_\infty$ ,  $v_\infty$  und zu einer auf  $\mathfrak{C}_0$  erklärten Funktion  $v$  eine Stromfunktion  $\Psi$  mit den charakteristischen Mittelwerten  $c_\infty$ ,  $v_\infty$  und der Geschwindigkeitsverteilung  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  gibt, ist die Stetigkeit von  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  und das Bestehen der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

$$(43) \quad v + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\mathfrak{C}_0} F v \, ds = 2 \left( v_{\infty, x} \frac{\partial x}{\partial s} + v_{\infty, y} \frac{\partial y}{\partial s} \right).$$

*Beweis.* Wir schicken die Bemerkung voraus, daß (37) und (38) ihre Gültigkeit beibehalten, wenn sich  $U$  um einen in  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}_0$ ,  $\mathfrak{C}_0$  regulären additiven Bestandteil von (36) unterscheidet. Gibt es nun zu gegebenen  $c_\infty$ ,  $v_\infty$ ,  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  eine Stromfunktion  $\Psi$  mit den charakteristischen Mittelwerten  $c_\infty$ ,  $v_\infty$  und der Geschwindigkeitsverteilung  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$ , so ist  $\Psi$  durch diese Angaben vollständig bestimmt und durch (20) in  $\mathfrak{A}$  gegeben. Definitionsgemäß ist  $\partial\Psi/\partial n$  und damit  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig. Aus (9), (20), (36) und (37) folgt notwendig

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\mathfrak{a}} - \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\mathfrak{C}_0} = -v - v_{\infty, x} \frac{\partial y}{\partial n} + v_{\infty, y} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\mathfrak{C}_0} F v \, ds = -\frac{v}{2},$$

und es entsteht (43) unter Benutzung der auf  $\mathfrak{C}_0$  geltenden Relationen

$$(44) \quad \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Seien umgekehrt Konstanten  $c_\infty, v_\infty$  und eine auf  $\mathfrak{C}_0$  stetige Funktion  $v$  gegeben und bestehne zwischen diesen Größen die Integralgleichung (43). Dann wollen wir zeigen, daß die mit  $c_\infty, v_\infty$  und  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  gebildete Funktion (20) eine Stromfunktion  $\Psi$  mit den behaupteten Eigenschaften ist. Zunächst ist  $\Psi$  in  $\mathfrak{A}$  zweimal stetig differenzierbar und sind (2) und (3) in  $\mathfrak{A}$  erfüllt. Mit (20), (36), (37), (43) und (44) bekommen wir weiter

$$(45) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_a = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\mathfrak{C}_0} - \frac{v}{2} = v_{\infty, x} \frac{\partial y}{\partial n} - v_{\infty, y} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\partial}{\partial n} \int_{\mathfrak{C}_0} F v \, ds \right. - \frac{v}{2} = -v;$$

damit sind die an der Außenseite von  $\mathfrak{C}_0$  genommenen Normalableitungen  $\partial \Psi / \partial n$  auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig. Wir betrachten nun  $\Psi$  durch (20) auch im Innengebiet  $\mathfrak{B}_0$  erklärt; dann folgt in Verbindung mit (36), (37) und (45) für den Durchgang durch  $\mathfrak{C}_0$

$$(46) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_i = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_a + v = 0.$$

Wir wenden nun den Greenschen Satz auf  $\mathfrak{B}_0$  an:

$$\iint_{\mathfrak{B}_0} (\Psi \Delta \Psi + \Psi_x^2 + \Psi_y^2) \, dx \, dy = \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \Big|_i \, ds;$$

da  $\Psi$  in  $\mathfrak{B}_0$  harmonisch und auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig ist, folgt wegen (46)

$$\iint_{\mathfrak{B}_0} (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) \, dx \, dy = 0$$

und damit

$$(47) \quad \Psi = \text{const} \quad \text{in } \mathfrak{B}_0.$$

Weiter bekommen wir mit Hilfe von (20), (36), (38) und (47)

$$(48) \quad \Psi|_a = \Psi|_i = \text{const}$$

und ist daher (4) auf  $\mathfrak{C}_0$  erfüllt. Unmittelbar zu übersehen ist ferner, daß (20) die Bedingung (5) erfüllt. Damit hat (20) alle Eigenschaften einer der Betrachtung zugrunde liegenden Stromfunktion  $\Psi$ . Dann besagt (45), daß  $\Psi$  auf  $\mathfrak{C}_0$  zu der gegebenen Geschwindigkeitsverteilung  $v$  führt. Aus (20), (33), (34) und (35) folgt ferner

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{v}_{+\infty} + \mathfrak{v}_{-\infty}) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathfrak{v}(x, y) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathfrak{v}(x, y) \right] = \mathfrak{v}_\infty,$$

d.h.  $\Psi$  besitzt gemäß (13) den gegebenen charakteristischen Mittelwert  $\mathfrak{v}_\infty$ . Schließlich bilden wir mit (20)

$$\Psi - x \Psi_x - v_{\infty, x} y = c_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} (F - x F_x) v \, ds.$$

Aus (21) und (35) erhalten wir für alle  $y$  die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (F - x F_x) = \pm \frac{\pi \xi}{t}$$

und folglich auch

$$(49) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\Psi - x \Psi_x - v_{\infty,x} y) = c_{\infty} \pm \frac{1}{2t} \int_{\mathfrak{C}_0} \xi v \, ds.$$

Dann können wir in (16) den Grenzübergang  $Z \rightarrow \infty$  ausführen und bekommen, da der durch (49) gegebene Grenzwert des Integranden nicht mehr von  $\eta$  abhängt,

$$(50) \quad c_{\pm\infty} = c_{\infty} \pm \frac{1}{2t} \int_{\mathfrak{C}_0} \xi v \, ds.$$

Damit besitzt  $\Psi$  gemäß (18) ebenfalls den charakteristischen Mittelwert  $c_{\infty}$ .

Aus den Sätzen 4 und 6 lesen wir unmittelbar die Eindeutigkeit ab, mit der  $\Psi$  durch  $c_{\infty}$ ,  $v_{\infty}$  und  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  bestimmt ist, wenn  $v$  stetig ist und der Integralgleichung (43) genügt; gäbe es nämlich zwei Funktionen  $\Psi$  mit den gleichen charakteristischen Mittelwerten  $c_{\infty}$  und  $v_{\infty}$  und den gleichen Geschwindigkeitsverteilungen  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$ , so wären beide Funktionen notwendig durch (20) darstellbar und somit identisch. Es werden schließlich durch alle Kombinationen  $c_{\infty}$ ,  $v_{\infty}$ ,  $v$ , wobei  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig und (43) erfüllt ist, auch alle Stromfunktionen  $\Psi$  mit den eingangs genannten Bedingungen erfaßt, da ja die Stetigkeit von  $v$  auf  $\mathfrak{C}_0$  und die Integralgleichung (43) notwendige Eigenschaften von  $\Psi$  sind. Wir brauchen uns im folgenden daher allein mit der Integralgleichung (43) zu beschäftigen. Da überdies nur die Geschwindigkeit auf  $\mathfrak{C}_0$  und nicht die Stromfunktion selbst interessiert, können wir die Konstante  $c_{\infty}$  ganz außer Betracht lassen und suchen daher bei konstantem, aber beliebigem  $v_{\infty}$  alle auf  $\mathfrak{C}_0$  stetigen Lösungen von (43).

Eine Lösung von (43) ist jedoch notwendig stetig auf  $\mathfrak{C}_0$ . Führen wir nämlich die Parameterdarstellung  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$  für  $\mathfrak{C}_0$  ein und setzen bei Beachtung von (1)

$$(51) \quad v(\varphi) = \frac{\omega(\varphi)}{\sqrt{[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}}^1,$$

so geht (43) in

$$(52) \quad \omega(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) \omega(\psi) \, d\psi = 2[v_{\infty,x} \dot{x}(\varphi) + v_{\infty,y} \dot{y}(\varphi)]$$

über, wobei, wie sich anschließend herausstellt,

$$(53) \quad K(\varphi, \psi; t) = \frac{2\pi}{t} \frac{\dot{y}(\varphi) \sin \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} - \dot{x}(\varphi) \sin \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}{\cos \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} - \cos \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}$$

<sup>1</sup> Die Einführung einer Funktion  $\omega(\varphi)$  durch (51) wird (bis aufs Vorzeichen) von ISAY [5] vorgeschlagen und trägt wesentlich zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen bei;  $\omega(\varphi)$  kommt jedoch keinerlei physikalische Bedeutung zu, da keine Invarianz gegenüber Parametertransformationen besteht.

ein für alle  $\varphi, \psi$  stetiger und in  $2\pi$  periodischer Kern ist;  $\omega(\varphi)$  und damit  $v(\varphi)$  sind infolgedessen im Falle ihrer Existenz ebenfalls stetig und in  $2\pi$  periodisch. Die Stetigkeit von  $K(\varphi, \psi; t)$  ist für  $\psi \neq \varphi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ , ohne weiteres evident, folgt jedoch auch für  $\psi = \varphi + 2k\pi$  aus der Existenz des (nicht mehr von  $t$  abhängenden) Grenzwertes

$$(54) \quad \lim_{\psi \rightarrow \varphi + 2k\pi} K(\varphi, \psi; t) = k(\varphi) \sqrt{[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}$$

mit

$$(55) \quad k(\varphi) = \frac{\dot{x}(\varphi) \ddot{y}(\varphi) - \dot{y}(\varphi) \ddot{x}(\varphi)}{\left( \sqrt{[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2} \right)^3} {}^1$$

als der Krümmung von  $\mathfrak{C}_0$  an der Stelle  $\varphi$ . Aus (10) und (51) erhalten wir noch für die Zirkulation

$$(56) \quad \Gamma = \int_0^{2\pi} \omega(\varphi) d\varphi.$$

### § 6. Allgemeine Lösung der homogenen Integralgleichung

Um zu Aussagen über die Existenz und Mannigfaltigkeit der Lösungen der Integralgleichung (52) zu gelangen, hat man nach der Fredholmschen Theorie [6], [7], [8] die zu (52) transponierte homogene Integralgleichung

$$(57) \quad \mu(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\psi, \varphi; t) \mu(\psi) d\psi = 0$$

auf die Existenz von nichttrivialen Lösungen  $\mu(\varphi)$  hin zu untersuchen.

**Satz 7.** *Die Integralgleichung (57) besitzt die nichttrivialen Lösungen*

$$(58) \quad \mu(\varphi) = \text{const} \neq 0.$$

*Beweis.* Es genügt offensichtlich, die Identität

$$(59) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) d\varphi = 1$$

nachzuweisen. Wir untersuchen vorerst die Funktion

$$(60) \quad H(x, y; \xi, \eta; t) = \frac{\frac{2\pi(y-\eta)}{t} \sin \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \frac{2\pi(x-\xi)}{t} \sin \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}{\cosh \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}$$

für alle  $(x, y)$  aus  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$ , wenn  $(\xi, \eta)$  auf  $\mathfrak{C}_0$  liegt. Während die Analytizität von  $H$  für alle  $(x, y) \neq (\xi, \eta)$  ohne weiteres einleuchtet, so gilt dies doch auch für  $(x, y) = (\xi, \eta)$ , wie anschließend gezeigt werden soll. Es genügt hierzu,

$$(61) \quad \tilde{H}(X, Y) = \frac{Y \sin X - X \sin Y}{\cosh X - \cos Y}$$

<sup>1</sup> Auf Grund des vorausgesetzten Umlaufssinns von  $\varphi$  bedeutet positives bzw. negatives  $k(\varphi)$  nach außen hin konvexe bzw. konkave Krümmung von  $\mathfrak{C}_0$ .

in einer Umgebung von  $X = Y = 0$  auf Analytizität hin zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
 (62) \quad \widetilde{H}(X, Y) &= -\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{X^{2\mu+3}}{(2\mu+3)!} - X \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \frac{Y^{2\mu+3}}{(2\mu+3)!} \\
 &\quad - \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{X^{2\mu+2}}{(2\mu+2)!} - \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \frac{Y^{2\mu+2}}{(2\mu+2)!} \\
 &= X Y \frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+3)!} \frac{X^{2\mu+2} + (-1)^{\mu} Y^{2\mu+2}}{X^2 + Y^2}}{\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+2)!} \frac{X^{2\mu+2} + (-1)^{\mu} Y^{2\mu+2}}{X^2 + Y^2}} \\
 &= X Y \frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+3)!} \left( \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} X^{2\mu-2\nu} Y^{2\nu} \right)}{\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+2)!} \left( \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\nu} X^{2\mu-2\nu} Y^{2\nu} \right)} \\
 &= \frac{1}{3} X Y - \frac{1}{90} (X^3 Y - X Y^3) + \dots
 \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert in einer Umgebung von  $X = Y = 0$ , da alle in (62) vorkommenden Reihenentwicklungen konvergieren bzw. durch die absolut konvergente Reihe (42) majorisiert werden. Damit ist (60) für alle  $(x, y)$  aus  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$  und alle  $(\xi, \eta)$  auf  $\mathfrak{C}_0$  analytisch. Dies gilt infolgedessen auch für die aus (60) folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
 (63) \quad \frac{1}{t} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{2\pi}{t} \sin \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}{\mathfrak{C}_0 \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}, \\
 \frac{1}{t} \frac{\partial H}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{2\pi}{t} \sin \frac{2\pi(x-\xi)}{t}}{\mathfrak{C}_0 \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t}}.
 \end{aligned}$$

Ersetzt man in (60) und (63)  $x, y, \xi, \eta$  bzw. durch  $x(\varphi), y(\varphi), x(\psi), y(\psi)$ , so sind (60) und (63) für alle  $\varphi, \psi$  und alle solche  $t > 0$  stetig, die nicht zur Berührung oder Überschneidung der  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1}, \dots$  führen; folglich ist mit (53) auch

$$(64) \quad \frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\dot{y}(\varphi)}{t} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\dot{x}(\varphi)}{t} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{t} \frac{\partial H}{\partial \varphi} 1$$

für alle  $\varphi, \psi$  und alle „zugelassenen“  $t$  stetig. Dann ist es aber erlaubt,

$$(65) \quad J(\psi; t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) d\varphi$$

unter dem Integralzeichen nach  $t$  zu differenzieren, und wir bekommen unter Benutzung der Eindeutigkeit von  $H$  auf  $\mathfrak{C}_0$  aus (64) und (65)

$$(66) \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial K}{\partial t} d\varphi = -\frac{1}{2\pi t} \int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} d\varphi = 0$$

<sup>1</sup> Der Verfasser verdankt diese Identität einer Anregung durch Herrn Dr. K. JÖRGENS.

für alle  $\psi$  und alle zugelassenen  $t$ . Wir führen jetzt in (53) für  $\psi \neq \varphi + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , den Grenzübergang  $t \rightarrow \infty^1$  aus:

$$(67) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(\varphi, \psi; t) = K(\varphi, \psi; \infty) = 2 \frac{\dot{y}(\varphi) [x(\varphi) - x(\psi)] - \dot{x}(\varphi) [y(\varphi) - y(\psi)]}{[x(\varphi) - x(\psi)]^2 + [\dot{y}(\varphi) - \dot{y}(\psi)]^2} - 2 \frac{d}{d\varphi} \operatorname{arc tg} \frac{y(\varphi) - y(\psi)}{x(\varphi) - x(\psi)}^2;$$

der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(\varphi, \varphi + 2k\pi; t)$  unterscheidet sich nicht von (54), da  $t$  nicht explizit in (54) vorkommt. Da schließlich (67) für  $\psi \rightarrow \varphi + 2k\pi$  gleichfalls den Grenzwert (54) besitzt, ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(\varphi, \psi; t)$  für alle  $\varphi, \psi$  stetig. Für alle  $\psi$  folgt nun aus (65) und (67)

$$(68) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} J(\psi; t) = 1.$$

Die Gleichungen (66) und (68) gestatten noch nicht, allgemein den Schluß zu ziehen, daß  $J(\psi; t)$  identisch den Wert 1 besitzt, da es z.B. im Falle „verzahnter“ Gitterprofile (Fig. 1) solche  $t$  gibt, die größer als der gegebene Profilabstand sind und dennoch zu Berührungen oder Überschneidungen der  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1}, \dots$  führen. Läßt man jedoch im gegebenen Gitterprofil  $\mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1}, \mathfrak{C}_{+3}, \mathfrak{C}_{-3}, \dots$  aus, betrachtet also an seiner Stelle ein aus  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+2}, \mathfrak{C}_{-2}, \mathfrak{C}_{+4}, \mathfrak{C}_{-4}, \dots$  bestehendes Profil mit doppeltem Abstand  $2t$ , so sind jetzt für alle größeren Abstände keine Berührungen oder Überschneidungen mehr möglich. Daher ist mit (66) und (68) allein der Schluß

$$(69) \quad J(\psi; 2t) = 1$$

erlaubt. Durch Integration der aus (53) folgenden Identität

$$(70) \quad K(\varphi, \psi; t) = 2K(\varphi, \psi; 2t) - 2 \frac{d}{d\varphi} \operatorname{arc tg} \frac{\sin \frac{\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}{\sin \frac{\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t}}$$

erhalten wir dann aber unter Benutzung von (65) und (69) die Behauptung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) d\varphi = J(\psi; t) = 2J(\psi; 2t) - 1 = 1.$$

**Satz 8.** Die Integralgleichung (57) besitzt nur die nichttrivialen Lösungen (58).

*Beweis.* Sei  $\mu(\varphi)$  eine Lösung von (57). Dann ist  $\mu(\varphi)$  für alle  $\varphi$  stetig und in  $2\pi$  periodisch und damit auch auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig. Führen wir in (57) die Bogenlänge als Parameter ein, so erhalten wir unter Verwendung von (27) und (53)

$$(71) \quad \mu - \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial F}{\partial n} \mu ds = 0,$$

<sup>1</sup> Hierbei wird die Tatsache benutzt, daß sich die  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1}, \dots$  für hinreichend große  $t$  nicht mehr berühren oder überschneiden können.

<sup>2</sup>  $K(\varphi, \psi; \infty)$  ist der Kern der bekannten Integralgleichung für ein einzelnes Profil [2].

wobei  $\partial/\partial n$  auf die Integrationsvariablen  $\xi, \eta$  bezogen ist. Wir definieren sodann mit Hilfe von  $\mu$  eine in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}_0$  eindeutige harmonische Funktion

$$(72) \quad V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial F}{\partial n} \mu \, ds.$$

Beim Durchgang durch  $\mathfrak{C}_0$  erleidet  $V$  einen Sprung

$$(73) \quad V|_a - V|_{\mathfrak{C}_0} = -\frac{\mu}{2}, \quad V|_{\mathfrak{C}_0} - V|_i = -\frac{\mu}{2},$$

während die Normalableitungen stetig bleiben:

$$(74) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_i = 0.$$

Die Beziehungen (73) und (74) leuchten ein, wenn man das entsprechende Verhalten des in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}_0$  eindeutigen Potentials

$$(75) \quad V^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{t}{2\pi r} \right) \mu \, ds$$

einer doppelten Belegung  $\mu$  auf  $\mathfrak{C}_0$  heranzieht [13]; dann ist nämlich

$$V^*(x, y) - V(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{t^2}{4\pi^2 r^2} - 2F \right) \right] \mu \, ds$$

eine in  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$  analytische Funktion, da mit (40) auch

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{t^2}{4\pi^2 r^2} - 2F \right)$$

für alle  $(x, y)$  aus  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$  analytisch ist, wenn  $(\xi, \eta)$  auf  $\mathfrak{C}_0$  liegt. Nunmehr ergeben (71), (72) und (73)

$$(76) \quad V|_a - V|_{\mathfrak{C}_0} - \frac{\mu}{2} = 0.$$

Wir wenden den Greenschen Satz auf das zweifach zusammenhängende Gebiet  $\mathfrak{B}_0^*$  mit den Berandungen  $\mathfrak{C}_0$  und  $\mathfrak{C}_0^*$  (Fig. 1) an:

$$(77) \quad \iint_{\mathfrak{B}_0^*} (V \Delta V + V_x^2 + V_y^2) \, dx \, dy = \int_{\mathfrak{C}_0^*} V \frac{\partial V}{\partial n} \, ds - \int_{\mathfrak{C}_0} \left( V \frac{\partial V}{\partial n} \right) \Big|_a \, ds.$$

Da  $\Delta V$  in  $\mathfrak{B}_0^*$  verschwindet,  $V \frac{\partial V}{\partial n}$  wegen (21) und (72) auf dem oberen und unteren Teil von  $\mathfrak{C}_0^*$  entgegengesetzt gleiche Werte besitzt und  $\partial V/\partial n$  auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig ist, folgt aus (76) und (77)

$$(78) \quad \iint_{\mathfrak{B}_0^*} (V_x^2 + V_y^2) \, dx \, dy = \int_{\mathfrak{C}_{0, \text{rechts}}^*} V V_x \, ds - \int_{\mathfrak{C}_{0, \text{links}}^*} V V_x \, ds.$$

Läßt man die Integrationswege  $\mathfrak{C}_{0, \text{rechts}}^*$  und  $\mathfrak{C}_{0, \text{links}}^*$  in Fig. 1 in je einem parallel zur  $x$ -Achse gelegenen Periodenstreifen bzw. gegen  $\pm \infty$  gehen und berücksichtigt dabei die aus (27) und (72) folgenden und für alle  $y$  geltenden Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [V(x, y) V_x(x, y)] = 0,$$

so geht die rechte Seite von (78) gegen Null, und man bekommt  $V = \text{const}$  in  $\mathfrak{B}^*$  und somit

$$(79) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_a = 0$$

auf  $\mathfrak{C}_0$ . Wir wenden schließlich den Greenschen Satz auf  $\mathfrak{B}_0$  an:

$$(80) \quad \iint_{\mathfrak{B}_0} (V \Delta V + V_x^2 + V_y^2) dx dy = \int_{\mathfrak{C}_0} \left( V \frac{\partial V}{\partial n} \right)_i ds.$$

Da  $\Delta V$  in  $\mathfrak{B}_0$  und  $\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_i$  wegen (74) und (79) auf  $\mathfrak{C}_0$  verschwindet und  $V|_i$  auf Grund der aus (73) und (76) folgenden Beziehung

$$(81) \quad V|_i = \mu$$

auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig ist, liefert (80)

$$\iint_{\mathfrak{B}_0} (V_x^2 + V_y^2) dx dy = 0.$$

Also ist  $V$  in  $\mathfrak{B}_0$  und damit auch  $V|_i$  auf  $\mathfrak{C}_0$  konstant, so daß (81) die Behauptung  $\mu = \text{const}$  auf  $\mathfrak{C}_0$  ergibt.

Auf Grund der Fredholmschen Sätze besitzt die zu (52) gehörige homogene und zu (57) transponierte Integralgleichung

$$(82) \quad \gamma(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) \gamma(\psi) d\psi = 0$$

wie (57) eine nichttriviale Lösung  $\gamma(\varphi)$  und geht die allgemeine Lösung aus dieser durch Multiplikation mit einem willkürlichen konstanten Faktor hervor. Jede Lösung von (82) ist für alle  $\varphi$  stetig und in  $2\pi$  periodisch.

**Satz 9.** Für jede nichttriviale Lösung  $\gamma(\varphi)$  der homogenen Integralgleichung (82) gilt

$$(83) \quad \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) d\varphi \neq 0.$$

*Beweis.* Es sei  $\gamma(\varphi)$  eine nichttriviale Lösung von (82). Wir nehmen an,  $\gamma(\varphi)$  erfülle die Bedingung

$$(84) \quad \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) d\varphi = 0.$$

Dann ist

$$(85) \quad \varrho(\varphi) = \frac{\gamma(\varphi)}{\sqrt{[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}}$$

nach Einführung der Bogenlänge als Parameter auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig und genügt wegen (43), (52), (82) und (84) den Bedingungen

$$(86) \quad \varrho + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\mathfrak{C}_0} F \varrho ds = 0,$$

$$(87) \quad \int_{\mathfrak{C}_0} \varrho ds = 0.$$

Wir erklären nun in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}_0$  eine eindeutige harmonische Funktion  $U(x, y)$  durch die Vorschrift (36). Dann folgt aus (36), (37) und (86)

$$(88) \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_i = 0.$$

Da ferner  $U$  auf  $\mathfrak{C}_0$  stetig ist, liefert der Greensche Satz für das Innere

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}_0} (U \Delta U + U_x^2 + U_y^2) dx dy &= \int_{\mathfrak{C}_0} \left( U \frac{\partial U}{\partial n} \right) \Big|_i ds, \\ \iint_{\mathfrak{B}_0} (U_x^2 + U_y^2) dx dy &= 0, \end{aligned}$$

d.h.  $U$  ist im ganzen Inneren konstant, und (38) ergibt

$$(89) \quad U|_a = \text{const}$$

auf  $\mathfrak{C}_0$ . Indem wir die aus (37), (87) und (88) folgende Beziehung

$$(90) \quad \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_a ds = \int_{\mathfrak{C}_0} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_i - \varrho \right) ds = 0$$

voranschicken, wenden wir den Greenschen Satz auf  $\mathfrak{B}_0^*$  (Fig. 4) an:

$$\iint_{\mathfrak{B}_0^*} (U \Delta U + U_x^2 + U_y^2) dx dy = \int_{\mathfrak{C}_0^*} U \frac{\partial U}{\partial n} ds - \int_{\mathfrak{C}_0} \left( U \frac{\partial U}{\partial n} \right) \Big|_a ds;$$

hier verschwindet insbesondere das Integral über  $\mathfrak{C}_0$  wegen (89) und (90), während sich die Integration über  $\mathfrak{C}_0^*$ , wie man leicht sieht, auf den rechten und linken Teil von  $\mathfrak{C}_0^*$  reduziert:

$$(91) \quad \iint_{\mathfrak{B}_0^*} (U_x^2 + U_y^2) dx dy = \int_{\mathfrak{C}_{0,\text{rechts}}^*} U U_x ds - \int_{\mathfrak{C}_{0,\text{links}}^*} U U_x ds.$$

Wir erhalten aus (21) und (36) für alle  $y$  die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{U(x, y)}{x^2} = 0;$$

wegen (35), (36) und (87) gilt außerdem für beliebige  $y$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 U_x(x, y)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_0} x^2 \left( F_x \pm \frac{\pi}{t} \right) \varrho ds = 0,$$

folglich auch

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [U(x, y) U_x(x, y)] = 0.$$

Läßt man die Berandungsstücke  $\mathfrak{C}_{0,\text{rechts}}^*$  und  $\mathfrak{C}_{0,\text{links}}^*$  bzw. gegen  $\pm\infty$  gehen, so liefert (91)

$$U = \text{const in } \mathfrak{B}_0^*$$

und somit

$$(92) \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_a = 0.$$

Dann ergeben (37), (88) und (92)

$$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_a - \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_i = -\varrho = 0$$

auf  $\mathfrak{C}_0$ . Wegen (85) ist schließlich für alle  $\varphi$

$$\gamma(\varphi) = 0,$$

d.h.  $\gamma(\varphi)$  ist im Widerspruch zur Voraussetzung die triviale Lösung der Integralgleichung (82).

Eine unmittelbare Folge von (83) besteht darin, daß man ohne Einschränkung

$$(93) \quad \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) d\varphi = 1$$

setzen darf; die Gleichungen (82) und (93) haben dann genau eine Lösung. Könnte man nämlich zwei voneinander verschiedene Funktionen  $\gamma_1(\varphi)$  und  $\gamma_2(\varphi)$  angeben, die beide (82) und (93) erfüllten, so wäre  $\gamma_1(\varphi) - \gamma_2(\varphi)$  eine nichttriviale Lösung von (82) mit

$$\int_0^{2\pi} [\gamma_1(\varphi) - \gamma_2(\varphi)] d\varphi = 0;$$

dies stände im Widerspruch zu Satz 9. Im folgenden verstehen wir unter  $\gamma(\varphi)$  stets diejenige Lösung der homogenen Integralgleichung (82), die der Nebenbedingung (93) genügt. Die allgemeine Lösung von (82) ist dann durch  $\text{const } \gamma(\varphi)$  gegeben.

### § 7. Allgemeine Lösung der inhomogenen Integralgleichung

Die inhomogene Integralgleichung

$$(94) \quad \alpha(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) \alpha(\psi) d\psi = 2\dot{x}(\varphi)$$

besitzt nach den Fredholmschen Sätzen sicher eine Lösung, da die inhomogene Seite von (94) zur allgemeinen Lösung  $\mu(\varphi)$  der transponierten homogenen Gleichung (57) orthogonal ist:

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}(\varphi) \mu(\varphi) d\varphi = \text{const} \int_0^{2\pi} \dot{x}(\varphi) d\varphi = 0.$$

Die allgemeine Lösung von (94) setzt sich dann aus einer speziellen und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung  $\text{const } \gamma(\varphi)$  additiv zusammen. Wegen (93) läßt sich der konstante Faktor vor  $\gamma(\varphi)$  durch die Forderung

$$(95) \quad \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) d\varphi = 0,$$

der eine spezielle Lösung  $\alpha(\varphi)$  der Gleichung (94) zusätzlich genügen soll, stets eindeutig bestimmen. Andererseits gibt es genau eine Lösung  $\alpha(\varphi)$ , die (94) und (95) gehorcht. Gäbe es zwei voneinander verschiedene Lösungen  $\alpha_1(\varphi)$  und  $\alpha_2(\varphi)$  von (94) und (95), so wäre  $\alpha_1(\varphi) - \alpha_2(\varphi)$  im Widerspruch zu Satz 9 eine nichttriviale

Lösung der homogenen Gleichung (82) mit

$$\int_0^{2\pi} [\alpha_1(\varphi) - \alpha_2(\varphi)] d\varphi = 0.$$

Im folgenden verstehen wir unter  $\alpha(\varphi)$  diejenige spezielle Lösung der inhomogenen Integralgleichung (94), die die Bedingung (95) erfüllt. In gleicher Weise bekommen wir genau eine Funktion  $\beta(\varphi)$  durch

$$(96) \quad \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi; t) \beta(\psi) d\psi = 2\dot{y}(\varphi),$$

$$(97) \quad \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) d\varphi = 0.$$

Dann stellt aber

$$v_{\infty, x} \alpha(\varphi) + v_{\infty, y} \beta(\varphi)$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Integralgleichung (52) dar, deren allgemeine Lösung nunmehr durch

$$(98) \quad \omega(\varphi) = v_{\infty, x} \alpha(\varphi) + v_{\infty, y} \beta(\varphi) + \Gamma \gamma(\varphi)$$

gegeben ist; der willkürliche konstante Faktor  $\Gamma$  bekommt darin wegen (56), (93) (95) und (97) die Bedeutung der Zirkulation. Auf Grund von (51) lautet die gesuchte allgemeine Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung auf  $\mathfrak{C}_0$  schließlich

$$(99) \quad v(\varphi) = v_{\infty, x} A(\varphi) + v_{\infty, y} B(\varphi) + \Gamma C(\varphi)$$

mit

$$(100) \quad \begin{aligned} A(\varphi) &= \frac{\alpha(\varphi)}{1[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}, \\ B(\varphi) &= \frac{\beta(\varphi)}{1[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}, \\ C(\varphi) &= \frac{\gamma(\varphi)}{1[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}. \end{aligned}$$

Da die Funktionen  $\alpha(\varphi), \beta(\varphi), \gamma(\varphi)$  nur von der Geometrie des gegebenen Gitterprofils abhängen, gilt dasselbe auch für die „Grundlösungen“ des Problems  $A(\varphi), B(\varphi), C(\varphi)$ , mit denen man die allgemeine Lösung (99) beherrscht. Die Größen  $\gamma(\varphi), A(\varphi), B(\varphi)$  sind dimensionslos, während  $\alpha(\varphi), \beta(\varphi)$  eine Länge und  $C(\varphi)$  eine reziproke Länge darstellt.

Von Seiten der Praxis interessiert die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung auf  $\mathfrak{C}_0$  bei gegebener „Anströmung“  $v_{\infty}$  und Zirkulation  $\Gamma$ . Es empfiehlt sich dann, (99) mit Hilfe von (14) in

$$(101) \quad v(\varphi) = v_{-\infty, x} A(\varphi) + v_{-\infty, y} B(\varphi) + \Gamma \left[ \frac{1}{2t} B(\varphi) + C(\varphi) \right]$$

umzuformen. Die „Abströmung“  $v_{+\infty}$  berechnet man aus (12). Häufig sind jedoch anstelle von  $\Gamma$  und  $v_{-\infty}$  An- und Abströmung  $v_{-\infty}$  und  $v_{+\infty}$  vorgeschrieben, allerdings mit der erforderlichen Einschränkung  $v_{-\infty, x} = v_{+\infty, x} = v_{\infty, x}$ . Für diesen Fall bekommt man die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung aus (12), (13) und (99) in der Form

$$(102) \quad v(\varphi) = v_{\infty, x} A(\varphi) + v_{-\infty, y} [\frac{1}{2} B(\varphi) - t C(\varphi)] + v_{+\infty, y} [\frac{1}{2} B(\varphi) + t C(\varphi)].$$

Mit  $v(\varphi)$  bekommt man die an  $\mathfrak{C}_0$  herrschende Druckverteilung aus der Bernoullischen Gleichung

$$(103) \quad \frac{p(\varphi) - p_{-\infty}}{q_{-\infty}} = 1 - \left[ \frac{v(\varphi)}{v_{-\infty}} \right]^2,$$

wenn  $v_{-\infty} = |\mathfrak{v}_{-\infty}|$  den Betrag der Anströmung,  $p_{\mp\infty}$  den Druck für  $x \rightarrow \mp\infty$  und  $p_{-\infty} + q_{-\infty} = p_{-\infty} + \frac{\rho}{2} v_{-\infty}^2$  den zur Anströmung  $\mathfrak{v}_{-\infty}$  und zur Dichte  $\rho^1$  gehörigen „Staudruck“ angibt.

Von praktischem Interesse ist ferner die auf  $\mathfrak{C}_0$  wirkende Gesamtkraft  $\mathfrak{R}$ . Man erhält sie aus dem Kutta-Joukowskischen Satz

$$(104) \quad \mathfrak{R} = \rho \Gamma [\mathfrak{v}_{\infty}, \mathfrak{k}],$$

für dessen Komponenten man aus (12), (13), (14) und der Bernoullischen Gleichung die Beziehungen

$$(105) \quad \begin{aligned} K_x &= \rho \Gamma v_{\infty, y} = \rho \Gamma \left( v_{\mp\infty, y} \pm \frac{\Gamma}{2t} \right) = \frac{\rho}{2} t (\mathfrak{v}_{+\infty}^2 - \mathfrak{v}_{-\infty}^2) = -t(p_{+\infty} - p_{-\infty}) \\ K_y &= -\rho \Gamma v_{\infty, x} = -\rho t v_{\infty, x} (v_{+\infty, y} - v_{-\infty, y}) \end{aligned}$$

erhält.

In Hinblick auf die Anwendung genügt somit die Kenntnis der Grundlösungen  $A(\varphi)$ ,  $B(\varphi)$ ,  $C(\varphi)$ , mit deren numerischer Bestimmung wir uns jetzt beschäftigen wollen.

## § 8. Interpolation und numerische Differentiation einer an äquidistanten Stellen gegebenen periodischen Funktion

Für die numerische Rechnung seien die  $\mathfrak{C}_0$  beschreibenden Funktionen  $x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  an den äquidistanten Stellen

$$(106) \quad \varphi_{\mu} = \frac{\mu \pi}{N}, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots,$$

als  $x_{\mu} = x(\varphi_{\mu})$  und  $y_{\mu} = y(\varphi_{\mu})$  gegeben, wobei  $N \geqq 2$  eine ganze Zahl bedeutet. Wegen  $\varphi_{\mu+2N} = \varphi_{\mu} + 2\pi$  und damit

$$(107) \quad x_{\mu+2N} = x(\varphi_{\mu} + 2\pi) = x_{\mu}, \quad y_{\mu+2N} = y(\varphi_{\mu} + 2\pi) = y_{\mu}$$

gibt  $2N$  genau die Anzahl der Konturpunkte auf  $\mathfrak{C}_0$  an, deren Koordinaten gegeben sind. Für die numerische Berechnung der Druckverteilung kommt es dann darauf an, allein mit den vorhandenen Informationen  $x_0 \dots x_{2N-1}$ ,  $y_0 \dots y_{2N-1}$ ,  $t$  die Grundlösungen  $A(\varphi)$ ,  $B(\varphi)$ ,  $C(\varphi)$  an den Stellen  $\varphi_{\mu}$ , also die Zahlenwerte  $A_0 \dots A_{2N-1}$ ,  $B_0 \dots B_{2N-1}$ ,  $C_0 \dots C_{2N-1}$  zu ermitteln<sup>2</sup>. Bei der Berechnung des Kernes  $K(\varphi, \psi; t)$  der gegebenen Integralgleichung taucht nun das Problem auf, die Ableitungen  $\dot{x}(\varphi)$  und  $\dot{y}(\varphi)$  numerisch zu bestimmen. Wir befassen uns daher zunächst mit der Differentiation einer an äquidistanten Stellen bekannten periodischen Funktion.

<sup>1</sup> Nicht zu verwechseln mit der durch (36) und (85) vorübergehend eingeführten Belegungsfunktion  $\rho$ .

<sup>2</sup> Im folgenden ist mit  $f_{\mu}$  stets der Wert einer periodischen Funktion  $f(\varphi)$  an der Stelle  $\varphi_{\mu}$  gemeint. Ist eine Funktion  $f(\varphi, \psi)$  in beiden Veränderlichen periodisch, so wird entsprechend  $f(\varphi_{\mu}, \varphi_{\nu}) = f_{\mu\nu}$  gesetzt.

Eine in  $2\pi$  periodische Funktion  $f(\varphi)$ , deren  $2N$  Funktionswerte  $f_\mu$  bekannt seien, werde durch eine Fouriersche Summe

$$(108) \quad \tilde{f}(\varphi) = \sum_{\mu=0}^N a_\mu \cos \mu \varphi + \sum_{\mu=1}^{N-1} b_\mu \sin \mu \varphi$$

derart interpoliert, daß

$$(109) \quad \tilde{f}_\mu = f_\mu$$

wird. Dann berechnen sich die Koeffizienten  $a_\mu, b_\mu$  eindeutig aus den Besselschen Formeln [14] zu

$$(110) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu, \\ a_\mu + i b_\mu &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu e^{i \mu \varphi_\nu}, \quad \mu = 1 \dots (N-1), \\ a_N &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu e^{i N \varphi_\nu}. \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für die Ableitung  $\dot{\tilde{f}}(\varphi)$ , die in der numerischen Rechnung an die Stelle der nicht bekannten Ableitungen  $\dot{f}(\varphi)$  treten soll. Es folgt aus (108) und (110)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varphi) &= \Re \left\{ a_0 + \sum_{\mu=1}^{N-1} (a_\mu + i b_\mu) e^{-i \mu \varphi} + a_N e^{-i N \varphi} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu \Re \left\{ 1 + 2 \sum_{\mu=1}^{N-1} e^{i \mu (\varphi_\nu - \varphi)} + e^{i N (\varphi_\nu - \varphi)} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu \Re \left\{ (1 + e^{i (\varphi_\nu - \varphi)}) \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{i \mu (\varphi_\nu - \varphi)} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu \Re \left\{ (1 + e^{i (\varphi_\nu - \varphi)}) \frac{1 - e^{i N (\varphi_\nu - \varphi)}}{1 - e^{i (\varphi_\nu - \varphi)}} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu \operatorname{ctg} \frac{\varphi_\nu - \varphi}{2} \sin N(\varphi_\nu - \varphi), \\ \dot{\tilde{f}}(\varphi) &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_\nu \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin N(\varphi_\nu - \varphi)}{\sin^2 \frac{\varphi_\nu - \varphi}{2}} - N \operatorname{ctg} \frac{\varphi_\nu - \varphi}{2} \cos N(\varphi_\nu - \varphi) \right\}; \end{aligned}$$

strebt  $\varphi \rightarrow \varphi_\mu, \mu = 0 \dots (2N-1)$ , so erhalten wir unter Beachtung von (106) zunächst

$$\dot{\tilde{f}}_\mu = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} (-1)^{\nu-\mu} f_\nu \operatorname{ctg} \frac{\varphi_\nu - \varphi_\mu}{2};$$

denken wir uns nun die  $f_\mu$  durch  $f_{\mu+2N} = f_\mu$  für beliebige  $\mu$  erklärt, so kommen wir zu der bequemeren Formel

$$(111) \quad \dot{\tilde{f}}_\mu = \sum_{\nu=1}^{2N-1} D_\nu f_{\mu+\nu}$$

mit

$$(112) \quad D_\nu = -\frac{(-1)^\nu}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_\nu}{2}, \quad \nu = 1 \dots (2N-1),$$

für die wir nachträglich die Beschränkung  $\mu = 0 \dots (2N-1)$  wieder aufheben können. Wir vermerken noch

$$(113) \quad \sum_{\mu=0}^{2N-1} \tilde{f}_\mu = 0$$

als Folge von (111) und (112).

### § 9. Numerisches Berechnungsverfahren

Will man die Integralgleichung (52) mit Hilfe irgendeiner Quadraturformel in ein lineares Gleichungssystem überführen, so macht sich die Spur  $K(\varphi, \varphi; t)$  des Kernes  $K(\varphi, \psi; t)$  besonders störend bemerkbar, weil in ihr nicht nur die ersten, sondern auch die zweiten Ableitungen von  $x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  vorkommen. Abgesehen vom praktischen Mehraufwand, den die Bestimmung der  $\ddot{x}(\varphi)$  und  $\ddot{y}(\varphi)$  erfordert, stellt doch schon die numerische Berechnung von  $\dot{x}(\varphi)$  und  $\dot{y}(\varphi)$  aus (111) und (112) eine Fehlerquelle dar und gilt dies in erhöhtem Maße für die zweiten Ableitungen. Aus diesem Grunde wollen wir die Integralgleichung (52) mit Hilfe der Identität (59) so umformen, daß bei anschließender Anwendung der Rechteckformel alle Kernelemente, die die zweiten Ableitungen enthalten, herausfallen:

$$(114) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K(\psi, \varphi; t) \omega(\varphi) - K(\varphi, \psi; t) \omega(\psi)] d\psi = 2[v_{\infty, x}\dot{x}(\varphi) + v_{\infty, y}\dot{y}(\varphi)].$$

Denken wir uns die Integralgleichungen (82), (94) und (96) entsprechend umgeformt, so bekommen wir im Zusammenhang mit den Nebenbedingungen (93), (95), (97) für die Näherungen  $\tilde{\alpha}(\varphi)$ ,  $\tilde{\beta}(\varphi)$ ,  $\tilde{\gamma}(\varphi)$  das lineare Gleichungssystem

$$(115) \quad \begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq 0}}^{2N-1} \tilde{K}_{\mu 0} & -\tilde{K}_{01} & \dots & -\tilde{K}_{0, 2N-1} \\ -\tilde{K}_{10} & \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq 1}}^{2N-1} \tilde{K}_{\mu 1} & \dots & -\tilde{K}_{1, 2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{K}_{2N-1, 0} & -\tilde{K}_{2N-1, 1} & \dots & \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq 2N-1}}^{2N-1} \tilde{K}_{\mu, 2N-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 & \tilde{\beta}_0 & \tilde{\gamma}_0 \\ \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\gamma}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\alpha}_{2N-1} & \tilde{\beta}_{2N-1} & \tilde{\gamma}_{2N-1} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 2\dot{\tilde{x}}_0 & 2\dot{\tilde{y}}_0 & 0 \\ 2\dot{\tilde{x}}_1 & 2\dot{\tilde{y}}_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\dot{\tilde{x}}_{2N-1} & 2\dot{\tilde{y}}_{2N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses System ist jedoch nur scheinbar überbestimmt; da nämlich die Summe der ersten  $2N$  Gleichungen des Systems wegen (113) identisch verschwindet, kann

man ohne Einschränkung der Allgemeinheit irgendeine der ersten  $2N$  Gleichungen fortlassen. In (115) bedeutet  $\tilde{K}(\varphi, \psi; t)$  diejenige Kernfunktion, die aus (53) hervorgeht, wenn man  $\dot{x}(\varphi)$  und  $\dot{y}(\varphi)$  bzw. durch  $\ddot{x}(\varphi)$  und  $\ddot{y}(\varphi)$  ersetzt.

Die Berechnung der Kernwerte  $\tilde{K}_{\mu\nu}$  für  $\mu \neq \nu$  stellt einen wesentlichen Anteil des Rechenverfahrens dar. Den entstehenden Aufwand kann man aber noch weitgehend einschränken, indem man die numerische Bestimmung der  $\tilde{K}_{\mu\nu}$  durch Anwendung der Additionstheoreme auf algebraische Operationen zurückführt. Zu diesem Zweck stellt man zu Beginn außer den Ableitungen  $\dot{x}_\mu, \dot{y}_\mu, \mu = 0 \dots (2N-1)$ , die Zahlenwerte

$$(116) \quad \begin{aligned} E_\mu &= e^{\frac{2\pi x_\mu}{t}}, & \mu &= 0 \dots (2N-1), \\ F_\mu &= e^{-\frac{2\pi x_\mu}{t}}, & \mu &= 0 \dots (2N-1), \\ R_\mu &= \cos \frac{2\pi y_\mu}{t}, & \mu &= 0 \dots (2N-1), \\ S_\mu &= \sin \frac{2\pi y_\mu}{t}, & \mu &= 0 \dots (2N-1), \end{aligned}$$

bereit. Mit Hilfe von (53) wird dann für  $\mu, \nu = 0 \dots (2N-1), \mu \neq \nu$ ,

$$(117) \quad \tilde{K}_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{t} \frac{\dot{y}_\mu [1 - (F_\mu E_\nu)^2] - 2\dot{x}_\mu F_\mu E_\nu (S_\mu R_\nu - R_\mu S_\nu)}{1 - 2F_\mu E_\nu (R_\mu R_\nu + S_\mu S_\nu) + (F_\mu E_\nu)^2}$$

oder auch

$$(118) \quad \tilde{K}_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{t} \frac{\dot{y}_\mu [(E_\mu F_\nu)^2 - 1] - 2\dot{x}_\mu E_\mu F_\nu (S_\mu R_\nu - R_\mu S_\nu)}{(E_\mu F_\nu)^2 - 2E_\mu F_\nu (R_\mu R_\nu + S_\mu S_\nu) + 1};$$

wegen  $E_\mu F_\mu = 1$  sind (117) und (118) miteinander identisch.

Bei Benutzung elektronischer Rechenmaschinen mit Festkomma-Arbeitsweise machen die Bereiche der  $E_\mu, F_\mu$  Schwierigkeiten. In diesem Fall sollte man wenigstens die  $E_\mu, F_\mu$  und die anfallenden Produkte  $E_\mu F_\nu$  mit Hilfe eines Gleitkomma-Unterprogramms bestimmen; je nachdem, ob dann  $F_\mu E_\nu$  bzw.  $E_\mu F_\nu$  nicht größer als 1 ausfällt, kehre man mit  $F_\mu E_\nu$  bzw.  $E_\mu F_\nu$  zur Festkomma-Darstellung zurück und benutze zweckmäßig (117) bzw. (118).

Nach Auflösung des Gleichungssystems (115) findet man schließlich die Näherungen der Grundlösungen  $\tilde{A}(\varphi), \tilde{B}(\varphi), \tilde{C}(\varphi)$  entsprechend (100) aus

$$(119) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_\mu &= \frac{\tilde{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}}, & \mu &= 0 \dots (2N-1), \\ \tilde{B}_\mu &= \frac{\tilde{y}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}}, & \mu &= 0 \dots (2N-1), \\ \tilde{C}_\mu &= \frac{\tilde{y}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}}, & \mu &= 0 \dots (2N-1). \end{aligned}$$

## § 10. Auswahl einer geeigneten Parameterdarstellung für die Kontur

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß für  $\mathfrak{C}_0$  eine Parameterdarstellung  $x(\varphi), y(\varphi)$  gegeben ist. In praktisch interessanten Fällen wird man jedoch eine solche Darstellung im allgemeinen nicht vorfinden;  $\mathfrak{C}_0$  wird vielmehr graphisch oder an

diskreten Punkten numerisch gegeben sein, die wiederum eine graphische Auftragung von  $\mathfrak{C}_0$  gestatten. Wir beschreiben im folgenden eine Methode, nach der man Funktionen  $x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  mit den gewünschten Eigenschaften für bestimmte praktisch vorkommende Gitterprofile konstruieren kann<sup>1</sup>.

Auf  $\mathfrak{C}_0$  gebe es zwei Punkte  $\xi_0 = (x_0, y_0)$  und  $\xi_N = (x_N, y_N)$  mit den (in Gegenuhrzeigersinn gerichteten) Tangentialeinheitsvektoren  $t_0 = (x'_0, y'_0)$ <sup>2</sup> bzw.  $t_N = (x'_N, y'_N)$ , den (nach außen gerichteten) Normaleneinheitsvektoren  $n_0 = (y'_0, -x'_0)$  bzw.  $n_N = (y'_N, -x'_N)$  und den (zweckmäßig aber nicht notwendig maximalen) Krümmungen  $k_0 > 0$  und  $k_N > 0$ , die sich unter den Voraussetzungen

$$(120) \quad b_0 = (n_0, \xi_0 - \xi_N) > 0, \quad b_N = (n_N, \xi_N - \xi_0) > 0$$

als „Hinterkante“ bzw. „Vorderkante“ auszeichnen lassen. Nun stellt die Gleichung

$$(121) \quad g(x, y; \varphi) \equiv (n_0, \xi - \xi_0) \cos^2 \frac{\varphi}{2} - (n_N, \xi - \xi_N) \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0$$

sicher für jedes  $0 \leq \varphi \leq \pi$  eine Gerade dar; es gilt nämlich

$$\left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{2} [1 - (n_0, n_N)] + \frac{1}{2} [1 + (n_0, n_N)] \cos^2 \varphi,$$

wobei die rechte Seite sicher nirgends verschwinden kann, da sonst  $n_0 = n_N$  wäre und aus (120) dann  $b_0 + b_N = (n_0 - n_N, \xi_0 - \xi_N) = 0$  folgen würde. Speziell stellen

$$(122) \quad g(x, y; 0) \equiv (n_0, \xi - \xi_0) = 0, \quad g(x, y; \pi) \equiv -(n_N, \xi - \xi_N) = 0$$

die Tangenten an die Hinter- bzw. Vorderkante dar, während die Geradenschar (121) für  $0 < \varphi < \pi$  das von (122) eingeschlossene Gebiet schlicht überdeckt. Von  $\mathfrak{C}_0$  wird nun die weitere Eigenschaft vorausgesetzt, daß die Tangenten (122) außer den Berührungs punkten  $\xi_0$  bzw.  $\xi_N$  und alle dazwischen liegenden Geraden außer je einem Schnittpunkt (Schnittwinkel  $\neq 0$ ) mit der „Ober-“ bzw. „Unterseite“ von  $\mathfrak{C}_0$  keine gemeinsamen Punkte mit  $\mathfrak{C}_0$  besitzen dürfen. Ersetzt man dann in jedem Schnittpunkt mit der Unterseite  $\varphi$  durch  $2\pi - \varphi$ , so erhält man auf  $\mathfrak{C}_0$  eine eindeutige Zuordnung zwischen der Bogenlänge und einem die Kontur im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenden Parameter  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Praktisch bedeutet dies, daß man  $N+1$  Geraden  $g_\mu \equiv g(x, y; \varphi_\mu) = 0$ ,  $\mu = 0 \dots N$ , in die gegebene Zeichnung einträgt und die Koordinaten der Schnitt- bzw. Berührungs punkte  $x_\mu, y_\mu$ ,  $\mu = 0 \dots (2N-1)$ , abliest (Fig. 3).

Da  $\mathfrak{C}_0$  stetig gekrümmmt ist, folgt die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von  $x(\varphi)$  und  $y(\varphi)$  ohne weiteres für  $0 < \varphi < \pi$  und  $\pi < \varphi < 2\pi$ , während die Stellen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  bzw.  $\xi_0$  und  $\xi_N$  besonders untersucht werden müssen. Wir nehmen dazu einfacheitshalber an, daß die Konturkrümmung  $k(s)$  in einer

<sup>1</sup> Grundsätzlich könnte man natürlich die Bogenlänge als Parameter wählen; dies dürfte jedoch deshalb unzweckmäßig sein, weil man dann für äquidistante Parameterwerte an stark gekrümmten, wie an weniger stark gekrümmten Stellen der Berandung die gleiche „Punktdichte“ bekäme, während eine dichtere Besetzung mit Kontur punkten in der Umgebung stärkerer Krümmungen wünschenswert erscheint.

<sup>2</sup> Akzente bedeuten Differentiation nach der im Gegenuhrzeigersinn wachsenden Bogenlänge  $s$ .

Umgebung von  $\varrho_0$  bzw.  $s=0$  analytisch ist. Dann gilt

$$k = k_0 + k'_0 s + \dots$$

und folgt hieraus der Ortsvektor in kanonischer Darstellung [15]

$$(123) \quad \xi = \varrho_0 + t_0 s - \frac{1}{2} k_0 n_0 s^2 - \frac{1}{6} (k_0^2 t_0 + k'_0 n_0) s^3 + \dots$$

Durch Einsetzen in die Geradengleichung (121) erhält man unter Benutzung von (120) für die Abhängigkeit zwischen  $s$  und  $\varphi$  in einer Umgebung von  $s=0$  bzw.  $\varphi=0$

$$\left( \frac{1}{2} k_0 s^2 + \frac{1}{6} k'_0 s^3 + \dots \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2} = [b_N - (t_0, n_N) s + \dots] \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

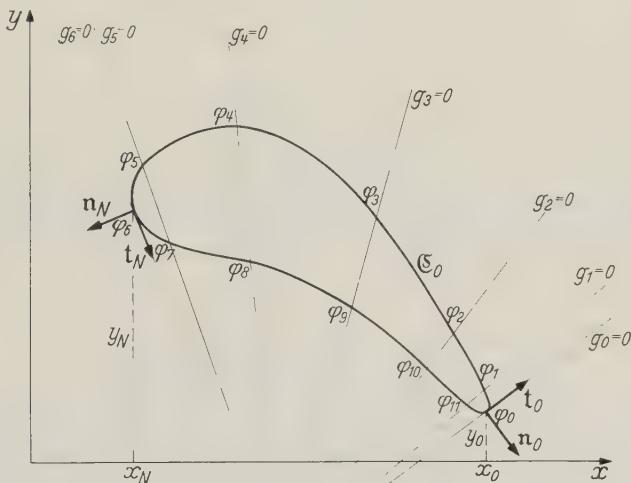


Fig. 3. Konstruktion einer Parameterdarstellung  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$  für eine gegebene Kontur  $C_0$  im Falle  $2N = 12$

Beiderseitiges Radizieren liefert, wenn man beachtet, daß  $s$  und  $\varphi$  gleiche Vorzeichen besitzen,

$$\sqrt{\frac{k_0}{2}} s \left( 1 + \frac{k'_0}{6k_0} s + \dots \right) \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{b_N} \left[ 1 - \frac{(t_0, n_N)}{2b_N} s + \dots \right] \sin \frac{\varphi}{2};$$

dann ist aber

$$(124) \quad \begin{aligned} \varphi &= 2 \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{k_0}{2b_N}} s \frac{1 + \frac{k'_0}{6k_0} s + \dots}{1 - \frac{(t_0, n_N)}{2b_N} s + \dots} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2k_0}{b_N}} \left\{ s + \left[ \frac{k'_0}{6k_0} + \frac{(t_0, n_N)}{2b_N} \right] s^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

analytisch in einer Umgebung von  $s=0$ , und ebenso ist  $s$  eine analytische Funktion von  $\varphi$  in einer Umgebung von  $\varphi=0$ . Eliminiert man  $s$  in (123) mit Hilfe von (124), so hängt auch  $\xi$  in einer Umgebung von  $\varphi=0$  analytisch von  $\varphi$  ab. In gleicher Weise findet man reguläres Verhalten von  $\xi$  an der Stelle  $\varphi=\pi$ .

### § 11. Beispiele

Vorgegeben seien reelle Zahlen  $a > 0$ ,  $t > 0$ ,  $v_{\infty, x}$ ,  $v_{\infty, y}$ ,  $\Gamma$ . Dann definiert

$$(125) \quad v_x^* - i v_y^* = v_{\infty, x} w_1^*(\zeta) + v_{\infty, y} w_2^*(\zeta) + \Gamma w_3^*(\zeta)$$

mit

$$\begin{aligned} w_1^*(\zeta) &= \frac{t}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta + a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}} + \frac{1}{\zeta + a \operatorname{Tg} \frac{2\pi a}{t}} - \frac{1}{\zeta} \right), \\ w_2^*(\zeta) &= \frac{t}{2\pi i} \left( \frac{1}{\zeta + a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}} - \frac{1}{\zeta + a \operatorname{Tg} \frac{2\pi a}{t}} + \frac{1}{\zeta} \right), \\ w_3^*(\zeta) &= \frac{1}{4\pi i} \left( -\frac{1}{\zeta + a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}} + \frac{1}{\zeta + a \operatorname{Tg} \frac{2\pi a}{t}} + \frac{1}{\zeta} \right) \end{aligned}$$

in der  $\zeta$ -Ebene auf dem Kreis

$$(127) \quad \zeta = a e^{i\chi}, \quad 0 \leq \chi \leq 2\pi,$$

und überall außerhalb desselben mit Ausnahme der Stelle  $\zeta = -a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}$  eine Potentialströmung  $v^* = (v_x^*, v_y^*)$ . Der Kreis (127) ist auf Grund des bekannten Spiegelungsprinzipes Stromlinie bzw. Teil einer solchen, denn es gilt

$$(128) \quad w_v^*(a e^{i\chi}) = -i e^{-i\chi} W_v(\chi), \quad v = 1, 2, 3,$$

wobei die

$$\begin{aligned} W_1(\chi) &= -\frac{t}{2\pi a} \frac{\operatorname{Sin} \frac{4\pi a}{t} \sin \chi}{\operatorname{Cos} \frac{4\pi a}{t} + \operatorname{Sin} \frac{4\pi a}{t} \cos \chi}, \\ W_2(\chi) &= \frac{t}{2\pi a} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{4\pi a}{t} + \operatorname{Sin} \frac{4\pi a}{t} \cos \chi} \right), \\ W_3(\chi) &= \frac{1}{4\pi a} \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{4\pi a}{t} + \operatorname{Sin} \frac{4\pi a}{t} \cos \chi} \right) \end{aligned}$$

reelle Größen sind.

Denkt man sich nun die  $\zeta$ -Ebene entlang der reellen Achse von  $-\infty$  bis  $-a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}$  aufgeschnitten, so überführt die konforme Abbildung

$$(130) \quad z = x + i y = \frac{t}{2\pi} \ln \left( \operatorname{Cos} \frac{2\pi a}{t} + \frac{\zeta}{a} \operatorname{Sin} \frac{2\pi a}{t} \right)$$

den Kreis (127) der  $\zeta$ -Ebene in ein Gitterprofil der  $z$ -Ebene mit der Teilung  $t$ , den Begrenzungen  $a_{\pm} = \pm a$  und der Parameterdarstellung für  $\operatorname{C}_0$

$$\begin{aligned} (131) \quad x &= \frac{t}{2\pi} \ln \sqrt{\operatorname{Cos} \frac{4\pi a}{t} + \operatorname{Sin} \frac{4\pi a}{t} \cos \chi}, \\ y &= \frac{t}{2\pi} \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{Sin} \frac{2\pi a}{t} \sin \chi}{\operatorname{Cos} \frac{2\pi a}{t} + \operatorname{Sin} \frac{2\pi a}{t} \cos \chi}^1, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Für den  $\operatorname{arc tg}$  sind die Hauptwerte zu nehmen.

wobei  $\mathfrak{C}_0$  mit wachsendem  $0 \leq \chi \leq 2\pi$  genau einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Die Geschwindigkeitsverteilung (125) transformiert sich in die Potentialströmung  $v = (v_x, v_y)$  der  $z$ -Ebene gemäß

$$(132) \quad v_x - i v_y = v_{\infty, x} w_1(z) + v_{\infty, y} w_2(z) + \Gamma w_3(z)$$

mit

$$(133) \quad w_\nu(z) = \frac{d\zeta}{dz} w_\nu^*(\zeta) = \frac{2\pi}{t} \left( \zeta + a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t} \right) w_\nu^*(\zeta), \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Da die Grenzübergänge  $\zeta \rightarrow \infty$  und  $\zeta \rightarrow -a \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}$  in der  $\zeta$ -Ebene den Grenzübergängen  $x \rightarrow \pm \infty$  in der  $z$ -Ebene äquivalent sind, folgt aus (126) und (133)

$$(134) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} w_1(z) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} w_2(z) &= -i, \\ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} w_3(z) &= \mp \frac{i}{2t}. \end{aligned}$$

Damit enthält (132) einerseits die Berandungen  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_{+1}, \mathfrak{C}_{-1}, \dots$  als Stromlinien bzw. als Bestandteile von Stromlinien und erfüllt zum anderen für  $x \rightarrow \pm \infty$  die Bedingungen

$$(135) \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} v_x = v_{\infty, x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} v_y = v_{\infty, y} \pm \frac{\Gamma}{2t};$$

folglich ist (132) die allgemeine Lösung des Problems und ergeben sich die Grundlösungen aus der Definition (99) als die Werte der  $w_\nu(z)$  auf  $\mathfrak{C}_0$ . Beachtet man, daß jede Geschwindigkeitsangabe auf  $\mathfrak{C}_0$  bei Umströmung im Gegenuhrzeigersinn einen positiven Wert haben soll, so folgt für die Grundlösungen aus (128) und (130)

$$(136) \quad \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| W_\nu(\chi) = \frac{2\pi a}{t} \frac{W_\nu(\chi)}{\operatorname{Sin} \frac{2\pi a}{t}} \sqrt{\operatorname{Cos} \frac{4\pi a}{t} + \operatorname{Sin} \frac{4\pi a}{t} \cos \chi}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Die Parameterdarstellung (131) ist nun insofern für die numerische Rechnung ungeeignet, als sie die Symmetrie des Gitterprofils bezüglich der  $y$ -Achse nicht ausnutzt. Wir wenden daher das in § 10 beschriebene Verfahren zur Ermittlung eines Kurvenparameters  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  an und erhalten mit  $\xi_0 = a i$ ,  $\eta_0 = i$ ,  $\xi_N = -a i$ ,  $\eta_N = -i$  aus (121)

$$(137) \quad x(\varphi) = a \cos \varphi.$$

Eliminiert man  $\chi$  aus (131), so folgt

$$(138) \quad y(\varphi) = \pm \frac{t}{2\pi} \arccos \frac{\operatorname{Cos} \frac{2\pi x(\varphi)}{t}}{\operatorname{Cos} \frac{2\pi a}{t}} {}^1,$$

<sup>1</sup> Für den  $\arccos$  sind die Hauptwerte zu nehmen.

wobei das positive Vorzeichen für  $0 \leq \varphi \leq \pi$  und das negative für  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$  gilt.  
Entsprechend ergeben sich aus (129), (131) und (136) die Grundlösungen

$$(139) \quad \begin{aligned} A(\varphi) &= -2 \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t} \sin \frac{2\pi y(\varphi)}{t}, \\ B(\varphi) &= 2 \frac{\sin \frac{2\pi x(\varphi)}{t}}{\sin \frac{2\pi a}{t}}, \\ C(\varphi) &= \frac{1}{t} \frac{\operatorname{Cof} \frac{2\pi x(\varphi)}{t}}{\sin \frac{2\pi a}{t}}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist (138) in einer Umgebung von  $\varphi = 0$  analytisch und besitzt dort die Potenzreihenentwicklung

$$(140) \quad y(\varphi) = a \left\{ \varphi - \frac{1}{24} \left( 1 + \frac{6\pi a}{t} \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t} - \frac{2\pi a}{t} \operatorname{Tg} \frac{2\pi a}{t} \right) \varphi^3 + \dots \right\} \sqrt{\frac{t}{2\pi a} \operatorname{Tg} \frac{2\pi a}{t}},$$

im Zusammenhang mit (55) und (137) folgt weiter für die Krümmung in einer Umgebung von  $\varphi = 0$

$$(141) \quad k(\varphi) = \frac{2\pi}{t} \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t} - \frac{2\pi^2 a}{t^2} \varphi^2 + \dots,$$

d.h. an der Stelle  $\varphi = 0$  und damit aus Symmetriegründen auch an der Stelle  $\varphi = \pi$  nimmt die Krümmung von  $C_0$  die maximalen Werte  $\frac{2\pi}{t} \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}$  an.

Für drei verschiedene „Teilungsverhältnisse“  $\frac{t}{2a} = 1$ ,  $\frac{t}{2a} = 0,4$  und  $\frac{t}{2a} = 0,2$  ist das Gitterprofil (137) und (138) in Fig. 4 bis 6 dargestellt. Das numerische Verfahren wurde im Falle

$$\begin{aligned} \frac{t}{2a} &= 1 \quad \text{mit } 2N = 12 \quad \text{und } 2N = 24 \text{ Konturpunkten,} \\ \frac{t}{2a} &= 0,4 \quad \text{mit } 2N = 20 \quad \text{und } 2N = 40 \text{ Konturpunkten,} \\ \frac{t}{2a} &= 0,2 \quad \text{mit } 2N = 28 \quad \text{und } 2N = 56 \text{ Konturpunkten} \end{aligned}$$

durchgeführt. Die Koordinaten  $x_v, y_v$ , die exakten Werte (139) für die Grundlösungen  $A_v, B_v, C_v$  und deren Näherungswerte  $\tilde{A}_v, \tilde{B}_v, \tilde{C}_v$  als Resultat der numerischen Rechnung sind in den Tabellen 1 bis 3 aufgeführt; dabei genügt es aus Symmetriegründen, diese Größen für  $v = 0 \dots \frac{N}{2}$  anzugeben. Es zeigt sich, daß man für kleiner werdende Teilungsverhältnisse  $t/2a$  und damit für wachsende, mit  $a$  dimensionslos gemachte Maximalkrümmungen

$$a k(0) = \frac{2\pi a}{t} \operatorname{Ctg} \frac{2\pi a}{t}$$

eine größere Anzahl von Konturpunkten benötigt, um eine gleichbleibende Genauigkeit zu erhalten; zum anderen ergibt sich bei Halbierung der Schrittweite bzw. Verdoppelung der Konturpunkte eine sehr rasche Konvergenz gegen die strenge Lösung.

Die numerischen Rechnungen wurden mit der mittelschnellen elektronischen Rechenmaschine G 2 (ca. 20 Operationen pro Sekunde) des Max-Planck-Instituts

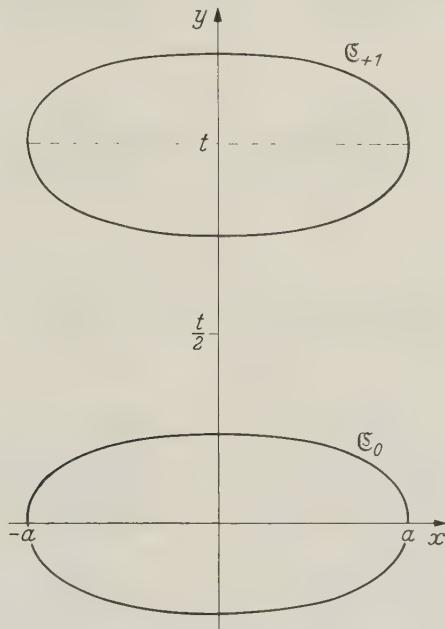


Fig. 4. Gitterprofil mit einem Teilungsverhältnis  $t/2 a=1$

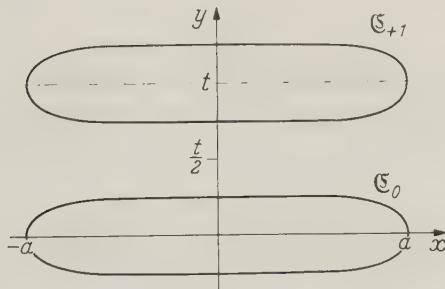


Fig. 5. Gitterprofil mit einem Teilungsverhältnis  $t/2 a=0,4$

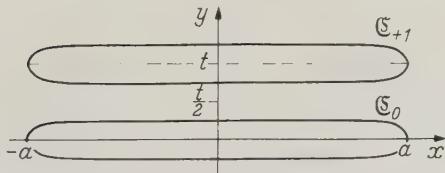


Fig. 6. Gitterprofil mit einem Teilungsverhältnis  $t/2 a=0,2$

für Physik und Astrophysik in München durchgeführt. Ohne Ausnutzung von speziell gegebenen Symmetrieeigenschaften dauert die vollständige Bestimmung der Grundlösungen mit der G 2 z. B. für  $2N = 24$  Konturpunkte ca. 80 Minuten.

Tabelle 1. Koordinaten und Grundlösungen für ein Gitterprofil mit  $t/2a = 1$ 

| $2N$ | $\mu$ | $\frac{x_\mu}{a}$ | $\frac{y_\mu}{a}$ | $A_\mu$        | $\tilde{A}_\mu$ | $B_\mu$        | $\tilde{B}_\mu$ | $a C_\mu$   | $a \tilde{C}_\mu$ |
|------|-------|-------------------|-------------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|-------------|-------------------|
| 12   | 0     | 1,000 000 0000    | 0,000 000 0000    | 0,000 000 0000 | 0,000 000 0000  | 2,000 000 0000 | 1,999 441 4     | 0,501 870 9 | 0,501 730 8       |
|      | 1     | 0,866 025 403 8   | 0,271 370 624 1   | -1,511 538 4   | -1,511 893 6    | 1,309 676 2    | 1,309 615 0     | 0,330 254 6 | 0,330 254 6       |
|      | 2     | 0,590 060 0000    | 0,430 549 351 3   | -1,959 889 9   | -1,960 057 6    | 0,398 536 8    | 0,398 558 1     | 0,108 663 7 | 0,108 663 7       |
|      | 3     | 0,000 000 0000    | 0,472 506 271 0   | -2,000 000 0   | -1,999 693 1    | 0,000 000 0    | 0,000 000 0     | 0,043 294 8 | 0,043 288 1       |
| 24   | 0     | 1,000 000 0000    | 0,000 000 0000    | 0,000 000 0000 | 0,000 000 0000  | 2,000 000 0000 | 1,999 999 4     | 0,501 870 9 | 0,501 870 8       |
|      | 1     | 0,965 925 826 3   | 0,144 379 757 6   | -0,879 656 3   | -0,879 656 7    | 1,796 163 9    | 1,796 164 2     | 0,451 123 3 | 0,451 123 4       |
|      | 2     | 0,866 025 403 8   | 0,271 370 554 1   | -1,511 538 4   | -1,511 538 1    | 1,309 676 2    | 1,309 676 3     | 0,330 269 1 | 0,330 269 1       |
|      | 3     | 0,707 106 781 2   | 0,368 781 927     | -1,837 784 3   | -1,837 784 3    | 0,789 017 7    | 0,789 017 5     | 0,201 949 9 | 0,201 949 8       |
|      | 4     | 0,500 000 0000    | 0,430 549 351 3   | -1,959 889 9   | -1,959 889 1    | 0,398 536 8    | 0,398 536 9     | 0,108 634 3 | 0,108 634 3       |
|      | 5     | 0,258 819 045 1   | 0,462 867 740 6   | -1,993 840 1   | -1,993 839 8    | 0,156 849 8    | 0,156 849 7     | 0,058 412 8 | 0,058 412 8       |
| 6    | 0     | 0,000 000 0000    | 0,472 506 271 0   | -2,000 000 0   | -2,000 000 0    | 0,000 000 0    | 0,000 000 0     | 0,043 294 8 | 0,043 294 8       |

Tabelle 2. Koordinaten und Grundlösungen für ein Gitterprofil mit  $t/2a = 0,4$ 

| $2N$ | $\mu$ | $\frac{x_\mu}{a}$ | $\frac{y_\mu}{a}$ | $A_\mu$        | $\tilde{A}_\mu$ | $B_\mu$        | $\tilde{B}_\mu$ | $a C_\mu$   | $a \tilde{C}_\mu$ |
|------|-------|-------------------|-------------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|-------------|-------------------|
| 20   | 0     | 1,000 000 0000    | 0,000 000 0000    | 0,000 000 0000 | 0,000 000 0000  | 2,000 000 0000 | 2,000 004 3     | 1,250 000 4 | 1,250 002 93      |
|      | 1     | 0,951 056 516 3   | 0,104 642 774 8   | -1,464 830 7   | -1,464 932 2    | 1,361 716 2    | 1,361 784 7     | 0,851 073 2 | 0,851 146 0       |
|      | 2     | 0,809 016 994 4   | 0,171 348 248 2   | -1,949 575 3   | -1,949 460 5    | 0,446 269 3    | 0,446 286 1     | 0,278 920 0 | 0,278 930 5       |
|      | 3     | 0,587 785 252 3   | 0,194 999 378 0   | -1,998 458 3   | -1,998 438 3    | 0,078 514 1    | 0,078 503 9     | 0,049 074 5 | 0,049 074 5       |
|      | 4     | 0,309 016 994 4   | 0,199 435 866 0   | -1,999 981 0   | -2,000 052 2    | 0,008 724 3    | 0,008 725 2     | 0,005 538 4 | 0,005 538 9       |
| 40   | 0     | 0,000 000 0000    | 0,199 901 144 9   | -2,000 000 0   | -1,999 919 8    | 0,000 000 0    | 0,000 000 0     | 0,000 970 5 | 0,000 970 5       |
|      | 1     | 0,987 688 340 6   | 0,055 094 441 8   | -0,838 666 7   | -0,838 666 7    | 1,815 664 7    | 1,815 664 7     | 1,134 790 8 | 1,134 790 8       |
|      | 2     | 0,951 056 516 3   | 0,104 642 774 8   | -1,464 830 7   | -1,464 830 7    | 1,361 716 2    | 1,361 716 1     | 0,851 073 2 | 0,851 073 1       |
|      | 3     | 0,891 006 524 2   | 0,144 131 509 3   | 1,810 533 2    | 1,810 533 3     | 0,849 687 8    | 0,849 687 8     | 0,531 055 8 | 0,531 055 8       |
|      | 4     | 0,809 016 994 4   | 0,171 348 248 2   | -1,949 575 3   | -1,949 575 2    | 0,446 269 3    | 0,446 269 3     | 0,278 920 0 | 0,278 920 0       |
| 10   | 5     | 0,707 106 781 2   | 0,187 217 822 2   | -1,989 930 7   | -1,989 930 7    | 0,200 438 9    | 0,200 438 9     | 0,125 278 1 | 0,125 278 1       |
|      | 6     | 0,587 785 252 3   | 0,194 999 378 0   | -1,998 458 3   | -1,998 458 3    | 0,078 514 1    | 0,078 514 1     | 0,049 080 9 | 0,049 080 9       |
|      | 7     | 0,433 990 499 7   | 0,198 250 698 1   | -1,999 811 8   | -1,999 811 8    | 0,027 433 2    | 0,027 433 2     | 0,017 173 2 | 0,017 173 2       |
|      | 8     | 0,309 016 994 4   | 0,199 435 866 0   | -1,999 981 0   | -1,999 981 0    | 0,008 724 3    | 0,008 724 3     | 0,005 538 4 | 0,005 538 4       |
|      | 9     | 0,156 434 465 0   | 0,199 816 660 8   | -1,999 998 5   | -1,999 998 5    | 0,002 425 4    | 0,002 425 4     | 0,001 799 9 | 0,001 799 9       |
| 10   | 0     | 0,000 000 0000    | 0,199 901 144 9   | -2,000 000 0   | -2,000 000 0    | 0,000 000 0    | 0,000 000 0     | 0,000 970 5 | 0,000 970 5       |

Tabelle 3. Koordinaten und Grundlösungen für ein Gitterprofil mit  $t/2a = 0.2$ 

| $2N$ | $\mu$ | $\frac{x_\mu}{a}$ | $\frac{y_\mu}{a}$ | $A_\mu$       | $\tilde{A}_\mu$ | $B_\mu$       | $\tilde{B}_\mu$ | $a C_\mu$     | $a \tilde{C}_\mu$ |
|------|-------|-------------------|-------------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-------------------|
| 28   | 0     | 1,000 000 000     | 0,000 000 000     | 0,000 000 000 | 0,000 000 000   | 2,000 000 000 | 2,000 085 4     | 2,500 000 000 | 2,500 106 8       |
|      | 1     | 0,974 027 912 2   | 0,052 874 632 6   | -1,476 608 6  | -1,476 726 8    | 1,348 935 5   | 1,349 026 2     | 1,686 169 3   | 1,686 282 8       |
|      | 2     | 0,900 968 867 9   | 0,086 461 203 7   | -1,954 943 0  | -1,954 770 5    | 0,422 135 0   | 0,422 150 7     | 0,527 668 7   | 0,527 688 4       |
|      | 3     | 0,781 831 482 5   | 0,097 931 589 6   | -1,998 944 5  | -1,998 960 1    | 0,064 969 6   | 0,064 958 2     | 0,081 212 0   | 0,081 197 8       |
|      | 4     | 0,623 489 801 9   | 0,099 828 061 7   | -1,999 927    | -2,000 038 1    | 0,005 401 6   | 0,005 402 6     | 0,006 752 0   | 0,006 753 2       |
|      | 5     | 0,433 883 739 1   | 0,099 991 252 1   | -2,000 000 0  | -1,999 945 8    | 0,000 274 8   | 0,000 274 8     | 0,000 343 5   | 0,000 343 5       |
|      | 6     | 0,222 520 934 0   | 0,099 999 683 5   | -2,000 000 0  | -2,000 051 3    | 0,000 009 9   | 0,000 009 9     | 0,000 012 4   | 0,000 012 4       |
| 56   | 0     | 1,000 000 000     | 0,000 000 000     | 0,000 000 000 | 0,000 000 000   | 2,000 000 000 | 2,000 000 000   | 2,500 000 000 | 2,500 000 000     |
|      | 1     | 0,993 712 209 9   | 0,027 831 245 4   | -0,846 758 6  | -0,846 758 6    | 1,811 905 0   | 1,811 905 1     | 2,264 881 3   | 2,264 881 3       |
|      | 2     | 0,974 927 912 2   | 0,052 874 632 6   | -1,476 608 6  | -1,476 608 6    | 1,348 935 5   | 1,348 935 4     | 1,686 169 3   | 1,686 169 3       |
|      | 3     | 0,943 883 330 3   | 0,072 814 374 6   | -1,820 399 0  | -1,820 399 2    | 0,828 340 1   | 0,828 340 2     | 1,035 425 2   | 1,035 425 2       |
|      | 4     | 0,900 968 867 9   | 0,086 461 203 7   | -1,954 943 0  | -1,954 942 9    | 0,422 135 0   | 0,422 135 0     | 0,527 668 7   | 0,527 668 7       |
|      | 5     | 0,846 724 199 2   | 0,094 260 261 7   | -1,991 878 7  | -1,991 878 8    | 0,180 053 1   | 0,180 053 1     | 0,225 066 4   | 0,225 066 4       |
|      | 6     | 0,781 831 482 5   | 0,097 931 589 6   | -1,998 944 5  | -1,998 944 5    | 0,064 969 6   | 0,064 969 6     | 0,081 212 0   | 0,081 212 0       |
| 14   | 7     | 0,707 106 781 2   | 0,099 360 553 1   | -1,999 899 1  | -1,999 899 1    | 0,020 088 5   | 0,020 088 5     | 0,025 110 6   | 0,025 110 6       |
|      | 8     | 0,623 489 801 9   | 0,099 828 061 7   | -1,999 927    | -1,999 927      | 0,005 401 6   | 0,005 401 6     | 0,006 752 0   | 0,006 752 0       |
|      | 9     | 0,532 032 076 5   | 0,099 959 124 9   | -1,999 999 6  | -1,999 999 6    | 0,001 284 1   | 0,001 284 1     | 0,001 605 2   | 0,001 605 2       |
|      | 10    | 0,433 883 739 1   | 0,099 991 252 1   | -2,000 000 0  | -2,000 000 0    | 0,000 274 8   | 0,000 274 8     | 0,000 343 5   | 0,000 343 5       |
|      | 11    | 0,330 279 062 0   | 0,099 998 281 6   | -2,000 000 0  | -2,000 000 0    | 0,000 054 0   | 0,000 054 0     | 0,000 067 5   | 0,000 067 5       |
|      | 12    | 0,222 520 934 0   | 0,099 999 683 5   | -2,000 000 0  | -2,000 000 0    | 0,000 009 9   | 0,000 009 9     | 0,000 012 4   | 0,000 012 4       |
|      | 13    | 0,111 964 476 1   | 0,099 999 942 7   | -2,000 000 0  | -2,000 000 0    | 0,000 001 7   | 0,000 001 7     | 0,000 002 3   | 0,000 002 3       |
| 14   | 0     | 0,000 000 000 0   | 0,099 999 980 8   | -2,000 000 0  | -2,000 000 0    | 0,000 000 0   | 0,000 000 0     | 0,000 000 8   | 0,000 000 8       |

### Literatur

- [1] KÁRMÁN, TH. v.: Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern. Abh. a. d. aerodyn. Institut Aachen, Heft 6.
- [2] PRAGER, W.: Die Druckverteilung an Körpern in ebener Potentialströmung. Phys. Z. **29**, 865–869 (1928).
- [3] PRANDTL, L.: Tragflügeltheorie. I. Mitteilung. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Jahrgang 1918, 451–477.
- [4] GOLDSTEIN, A. W., & M. JERISON: Isolated and Cascade Airfoils with Prescribed Velocity Distribution. NACA Techn. Report No. 869, 201–215 (1947).
- [5] ISAY, W. H.: Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. Diss. Z. angew. Math. Mech. **33**, 397–409 (1953).
- [6] FREDHOLM, I.: Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfversigt av Kungl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm **57**, Nr. 1, 39–46 (1900).
- [7] FREDHOLM, I.: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math. **27**, 365–390 (1903).
- [8] SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. I. Leipzig: Geest u. Portig 1950.
- [9] NYSTRÖM, E. J.: Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Commentationes Phys.-Math. Societas Scientiarum Fennica **4**, Nr. 15, 1–52 (1928).
- [10] NYSTRÖM, E. J.: Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen. Commentationes Phys.-Math. Societas Scientiarum Fennica **5**, Nr. 5, 1–22 (1929).
- [11] NYSTRÖM, E. J.: Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben. Acta Math. **54**, 185–204 (1930).
- [12] KANTOROWITSCH, L. W., u. W. I. KRYLOW: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
- [13] GOURSAT, É.: Cours d'Analyse Mathématique, tome III. Paris: Gauthier-Villars 1942.
- [14] WILLERS, FR. A.: Methoden der praktischen Analysis. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950.
- [15] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I. Berlin: Springer 1945.

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik  
München

(Eingegangen am 3. März 1959)

# *On the Uniqueness of Compressible Fluid Motions*

JAMES SERRIN

One of the fundamental questions which should be answered concerning any problem of applied mathematics is whether it is well set, that is, whether solutions actually exist and whether they are unique. We shall be concerned here with the initial value problem for compressible fluid flow, and we shall study in particular the uniqueness of its solutions. An exact statement of the problem will be found in § 1, while the main theorems are given in § 3 (viscous fluids) and § 4 (non-viscous fluids). Stated roughly, these theorems assert that fluid motion in a bounded region  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  is uniquely determined by its initial velocity, temperature, and density distribution together with certain boundary conditions. The form of the boundary conditions is especially interesting for non-viscous, non-heat conducting fluids, it being found, in fact, that such conditions are superfluous at any point where the fluid is leaving  $\mathcal{V}$  at a relatively supersonic speed. This result is intimately associated with the existence of characteristic manifolds in the flow region, and allows us to prove for spatial flows a theorem of the type given by COURANT & FRIEDRICHs for one-dimensional motions.

The uniqueness of the initial value problem for incompressible viscous fluids was proved as long ago as 1929 by E. FOÁ. His proof, which applies equally well to the non-viscous case, was rediscovered and presented more elegantly by DOLIDZE (see § 72 of reference [15] for a resumé of this work). More recently, GRAFFI showed that the initial value problem for compressible fluids is unique, provided that the pressure and density satisfy a piezotropic relation  $p = f(\varrho)$  with  $f'(\varrho) > 0$ . Our work is an extension of GRAFFI's, in that we make no assumption concerning the equation of state of the fluid, beyond requiring it to satisfy certain universal thermodynamic conditions. This generalization is non-trivial from both the physical and mathematical point of view, for it is well known that a relation between pressure and density is usually incompatible with the motion of a tri-variate fluid, whether or not it is viscous. Moreover, treatment of the general case requires that we use the full set of equations governing the fluid motion, including the complete energy equation.

The proof makes use of the classical energy method, developed originally by HADAMARD, ZAREMBA, and FRIEDRICHs & LEWY in connection with purely mathematical problems, and by REYNOLDS, ORR and FOÁ for the study of incompressible fluid motions. Perhaps the most novel feature of our treatment, in comparison with these, is the systematic utilization of the transport equation for the derivation of energy integral identities, thus taking into account in a natural way the special form of the convection terms in the flow equations.

Though a more abstract treatment does seem possible, this has been avoided on the grounds that it would cloud the fundamental issues and make the whole paper more difficult.

In view of the rather strong dependence of the viscosity and heat conduction coefficients on temperature in actual liquids and gases, we have included in the final section of the paper a brief discussion of this case. Also, although we do not treat heterogeneous fluids here, our results remain valid even in this case.

The reader should observe that the uniqueness theorem for non-viscous fluids specifically assumes the flows in question to be continuously differentiable. The proof can be extended without difficulty to cover flows with first order singular surfaces (Mach waves), but in its present form it does not apply to motions admitting shock waves. Such an extension would be very important, since there are numerous cases where the only possible solution involves a shock wave, or in which shock waves occur in the initial data, and in none of these is there reason to expect anomalous behavior so far as uniqueness is concerned. Further discussion of this point will be found in § 4.

### 1. Statement of the problem

We consider a fluid flow occupying a finite region  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ , and subject to certain prescribed conditions on the boundary  $\mathcal{S}$  of  $\mathcal{V}$ . Our purpose is to answer the following question: given the velocity, temperature and density distribution at some initial instant, does this uniquely determine the subsequent motion, or might it happen that two different motions could be compatible with the same initial conditions? To make the problem precise, we shall now set down the differential equations governing the fluid motion, and the exact boundary conditions which we shall consider. These take a somewhat different form depending on whether the fluid is viscous or not.

#### A. Viscous compressible fluid

The motion of the fluid is governed by the following standard equations of fluid mechanics,

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (2)$$

$$\varrho \frac{dE}{dt} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} T. \quad (3)$$

In these equations the symbols have their usual meanings, except perhaps for the stress tensor  $\mathbf{T}$ , the deformation tensor  $\mathbf{D}$ , the specific internal energy  $E$ , and the heat flux vector  $\mathbf{q}$ . The notation is that of ordinary Cartesian or Gibbsian vector analysis, so that, for example,

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_i = T_{ij,j}, \quad \mathbf{I} = \text{identity matrix}, \quad \mathbf{T} : \mathbf{D} = T_{ij} D_{ij}.$$

The material derivative  $d/dt$  is of course a differential operator and is defined by

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}.$$

The reader unfamiliar with equations (1)–(3) will find a complete derivation and explanation in the memoir of C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rational Mech. & Analysis, vol. 1, 1952.

To equations (1)–(3) must be added certain equations of state relating the thermodynamic variables  $\varrho$ ,  $p$ ,  $E$ , and  $T$ . For this purpose we shall take

$$p = p(\varrho, T) \quad \text{and} \quad E = E(\varrho, T) \quad (4)$$

as the defining relations; here  $p(\varrho, T)$  and  $E(\varrho, T)$  are given twice differentiable functions of the variables  $\varrho$  and  $T$ , whose explicit form depends of course on the particular fluid in question. In order to simplify the proof somewhat, we shall actually treat in detail only the case where the second equation has the special form

$$E = c_v T, \quad c_v = \text{Const.} > 0; \quad (5)$$

the proof can be carried out equally well in the general case provided that the specific heat  $c_v = (\partial E / \partial T)_\varrho$  is positive<sup>1</sup>. It may be added that (5) is quite well satisfied by most real gases and liquids at ordinary conditions.

On the boundary of  $\mathcal{V}$  we suppose the velocity distribution to be given (this will be the case in particular if  $\mathcal{V}$  is bounded by material walls to which the fluid must adhere). In addition to prescribing the velocity on  $\mathcal{S}$ , it is necessary to assign certain further conditions in order to determine the fluid motion. Various possibilities present themselves, depending on whether at a particular boundary point the fluid is entering  $\mathcal{V}$ , or leaving  $\mathcal{V}$ , or is constrained by a material wall. For convenience in tabulating these cases, let  $\mathbf{n}$  denote the outer unit normal to  $\mathcal{V}$ , and  $G$  the outward normal velocity of  $\mathcal{S}$ . Also, let

$$U = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - G \quad (6)$$

be the relative normal speed of particles at the boundary. Then we have the following table of

**Boundary Conditions.** At all points of the boundary  $\mathcal{S}$ , and at all instants of time, the velocity vector is given. Furthermore,

- a) At all points where  $U < 0$  the absolute temperature and the density are prescribed.
- b) At all points where  $U > 0$  the absolute temperature is given.
- c) At all points where  $U = 0$  one of the following conditions is assumed:
  - c1) The temperature is prescribed.
  - c2) The heat flux  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  is prescribed.

---

<sup>1</sup> The condition  $(\partial E / \partial T)_\varrho > 0$  is a general attribute of all real materials, as shown in textbooks on thermodynamics.

It is also possible to treat heterogeneous fluids which behave as inert mixtures; in this case the defining equations (4) become

$$p = p(\varrho, T, n), \quad E = E(\varrho, T, n), \quad \frac{dn}{dt} = 0, \quad (4')$$

where  $n$  is a parameter specifying the constitution of a given particle. The additional details necessary to handle cases (4) and (4') can readily be supplied by the reader.

c3) The heat flux is assumed to be proportional to the difference between the fluid temperature  $T$  and a given wall temperature  $T_0$ , that is,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = k(T - T_0), \quad k \geq 0.$$

Cases a), b), c) above correspond respectively to fluid entering  $\mathcal{V}$ , fluid leaving  $\mathcal{V}$ , and fluid constrained to move tangentially to  $\mathcal{V}$ . Condition c3) is the familiar Newtonian law of cooling. We remark that any one of conditions c1)–c3) could be used at a boundary point where  $U > 0$ , though only the first one seems to be of any physical interest.

This completes the specification of the differential equations and the boundary conditions for a viscous compressible fluid.

### B. Non-viscous compressible fluid

Assuming that the fluid is devoid of heat conduction as well as viscosity, the differential equations (1)–(3) reduce to the familiar system

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p, \quad (8)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (9)$$

where  $S$  denotes the specific entropy. The thermodynamic equation of state is conveniently assumed given in the form  $p = p(\varrho, S)$ , where the function  $p(\varrho, S)$  is continuously differentiable and

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S > 0, \quad (10)$$

corresponding to a *real* speed of sound in the fluid.

At each point of the boundary we suppose the normal velocity component  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  to be assigned (this is a weaker condition than was necessary for viscous fluids). The case of most interest is naturally that where the fluid is bounded by material walls and the normal velocity component is determined by the motion of these walls. In this case, in fact, no further boundary conditions should be imposed. The general situation is given in the following table, where  $U = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - G$ .

**Boundary Conditions.** At all points of the boundary  $\mathcal{S}$ , and at all instants of time, the normal velocity component  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  is given. Furthermore at all points where  $U < 0$  the complete fluid state—velocity, density, and entropy<sup>2</sup>—is assigned.

It is understood in this statement that no further conditions are to be imposed at points where  $U \geq 0$ . On the other hand, the fact that the entire fluid state must be prescribed at points where fluid is entering  $\mathcal{V}$  will appear reasonable upon a moment's reflection.

If heat conduction is present, the differential equations and boundary conditions take a somewhat different form. It is convenient to defer this case until a later section.

---

<sup>2</sup> In place of the entropy one could of course assign the temperature or the pressure and thus indirectly determine the entropy.

### C. The initial value problem

For both problems A and B above, a solution of the initial value problem is defined to be a set of continuously differentiable functions satisfying the given differential equations and the boundary conditions, and reducing when  $t=0$  to assigned initial distributions<sup>3</sup>. These solutions need not be continuable for all times  $t>0$ : it is not our intention, nor is it necessary in the proofs, to restrict consideration to solutions which exist for all time. Concerning the boundary of  $\mathcal{V}$ , we assume it smooth enough so that the divergence theorem is applicable at each instant, and also so that the developments of the following section are valid. It would be pedantic to state these agreements with any greater precision.

The solutions which we consider will be understood without further comment to have positive density at every point of the closure of  $\mathcal{V}$ .

## 2. The transport equation

Let  $F(x, y, z, t)$  be a continuously differentiable function defined over a region  $\mathcal{V}=\mathcal{V}(t)$  occupied by a moving fluid. In the sequel we shall have frequent occasion to use the transport formula

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varrho F dv = \int_{\mathcal{V}} \varrho \frac{dF}{dt} dv - \oint_{\mathcal{S}} \varrho UF da, \quad (11)$$

where  $\varrho$  and  $\mathbf{v}$  are the density and velocity of the fluid motion, and  $U$  denotes as usual the quantity  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - G$ . To prove (11), we begin with the rather obvious identity<sup>4</sup>

$$\frac{d}{dt} \int \varrho F = \int \frac{\partial}{\partial t} (\varrho F) + \oint \varrho FG, \quad (12)$$

---

<sup>3</sup> We do not consider "weak solutions" or solutions involving shock waves. On the other hand, with slight modifications it would be possible to deal with flows having first order singular surfaces.

<sup>4</sup> Formula (12) is well known and physically obvious: it says that the rate of change of the integral  $\int \varrho F$  arises as the sum of internal changes of  $\varrho F$  together with changes due to the fact that the boundary of  $\mathcal{V}$  is moving with normal speed  $G$ . A proof may be given as follows:

Suppose the moving region  $\mathcal{V}$  consists of those points  $(x, y, z)$  such that

$$x = f(a, b, c, t), \quad y = g(a, b, c, t), \quad z = h(a, b, c, t),$$

where  $a, b, c$  range over some closed region  $\mathcal{K}$  in  $R^3$ , and  $f, g, h$  are continuously differentiable functions of all their variables; suppose also that the mapping from  $\mathcal{K}$  to  $\mathcal{V}$  is one-to-one with non-vanishing Jacobian ( $\mathcal{V}$  is a differentiable homotope of  $\mathcal{K}$ ), and that the divergence theorem is applicable to  $\mathcal{V}$  at each instant. If the "velocity field"  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  is denoted by  $\mathbf{w}$ , then it can be shown that

$$\frac{d}{dt} \int \varphi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \oint \varphi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad \varphi = \varphi(x, y, z, t),$$

(cf. [15], § 4, or [16], p. 53). Since  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = G$  is the outward normal speed of the boundary of  $\mathcal{V}$ , this completes the proof of (12).

It is evident that the conditions laid down on  $\mathcal{V}$  in the preceding proof embrace all reasonable configurations. In any case, the regions which we shall consider in the rest of the paper are supposed to belong to the class for which (12) holds.

in which (as in the following work) the conventional volume and surface infinitesimals are omitted, and the integrals are understood to be extended over either  $\mathcal{V}$  or  $\mathcal{S}$  as the context indicates. With the help of the divergence theorem, one sees that the right hand side of (12) is equal to

$$\int \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varrho F) + \operatorname{div}(\varrho F \mathbf{v}) \right] + \oint \varrho F (G - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}).$$

On the other hand,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho F) + \operatorname{div}(\varrho F \mathbf{v}) = \varrho \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} F \right\} + F \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) \right\} = \varrho \frac{dF}{dt},$$

using the equation of continuity (1) or (6), and the definition of the operator  $d/dt$ . Combining the results of the last three displayed lines immediately establishes the validity of (11).

### 3. The main uniqueness theorem for viscous fluids

With the conditions and agreements of § 1 understood, we can now state the fundamental uniqueness theorem for compressible viscous fluids.

**Theorem 1.** *Let the coefficients of viscosity and heat conduction be constants satisfying the inequalities*

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \kappa \geq 0.$$

*Then there can be at most one solution of the initial value problem described in § 1A. Moreover, if  $\kappa = 0$  no boundary conditions on the temperature (or heat flux) need be imposed at points where  $U \geq 0$ .*

The important case where  $3\lambda + 2\mu = 0$  is not included in this theorem, but seems to require a more delicate treatment, see § 7. It may be remarked that Theorem 1 applies also to flows occupying unbounded regions, provided that certain boundary integrals at  $\infty$  can be assumed to vanish.

*Proof.* Let  $(\mathbf{v}, \varrho, T)$  and  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varrho}, \tilde{T})$  be two solutions of the problem under discussion. We shall show that they are in fact identical. For convenience in notation, a tilde over a flow quantity will mean that the quantity is to be evaluated for the flow  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varrho}, \tilde{T})$ . In addition, for an arbitrary flow quantity  $F$  we define

$$F' = \tilde{F} - F;$$

thus in particular,  $\mathbf{v}' = \tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}$ ,  $\varrho' = \tilde{\varrho} - \varrho$ , etc. The following identities will be used frequently throughout the paper:

$$\widetilde{AB} - AB = AB' + A' \widetilde{B}, \tag{13}$$

$$\frac{\widetilde{dF}}{dt} - \frac{dF}{dt} = \frac{dF'}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{F}. \tag{14}$$

The first of these is obvious, while the second follows from an easy calculation using the definition of the operator  $d/dt$ . Note that  $dF'/dt$  means

$$\frac{\partial F'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} F',$$

and not  $(dF/dt)'$ .

Since both flows satisfy the equation of continuity, we obtain by subtraction and use of the identities (13) and (14)

$$\frac{d\varrho'}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{\varrho} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v}' + \varrho' \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (15)$$

Multiplication by  $\varrho'$  yields

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \varrho'^2 \right) = -(\varrho' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{\varrho} + \varrho \varrho' \operatorname{div} \mathbf{v}' + \varrho'^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) = -I,$$

where  $I$  is defined by the last equality. Now using the transport equation (11) there results

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho \varrho'^2 = - \int \varrho I - \oint \varrho U \varrho'^2. \quad (16)$$

This formula will be important in the sequel.

Again, since both flows satisfy the equations of motion, we have by subtraction

$$\varrho \left( \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \varrho' \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = \varrho' \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}'.$$

Forming the scalar product of this equation with the vector  $\mathbf{v}'$ , and rearranging terms, yields

$$\varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v'^2 \right) = -[\varrho' \mathbf{v}' \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{f}) + \varrho \mathbf{v}' \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{T}' : \mathbf{D}'] + \operatorname{div}(\mathbf{T}' \cdot \mathbf{v}'),$$

where for brevity we have put  $v'^2 = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'$  and  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ . Finally, with the help of the transport equation and the fact that  $v' = 0$  on the boundary of  $\mathcal{V}$ , one obtains

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho v'^2 = - \int [\varrho' \mathbf{v}' \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{f}) + \varrho \mathbf{v}' \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{T}' : \mathbf{D}']. \quad (17)$$

Turning next to the energy equation, we observe that in virtue of (5) it can be written in the form

$$\varrho \frac{dT}{dt} = \Psi - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (\Psi \equiv \mathbf{T} : \mathbf{D}),$$

where without loss of generality we have set  $c_v = 1$ . Applying the method already described in connection with the previous equations, the reader will have no trouble in proving the identity

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho T'^2 &= \int \left[ T' \Psi' + \mathbf{q}' \cdot \operatorname{grad} T' - \varrho' T' \frac{d\tilde{T}}{dt} - \varrho T' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{T} \right] - \\ &\quad - \oint \left[ T' \mathbf{q}' \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \varrho U T'^2 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

The next step in the proof is to estimate the various terms which appear on the right hand sides of equations (16), (17) and (18). For this purpose it is convenient to restrict attention to some fixed time interval  $0 \leq t \leq \tau$ , where  $\tau$  is an arbitrary positive number (if the solutions are known to exist only for a finite time  $0 \leq t \leq \tau_0$ , then  $\tau$  is naturally chosen less than  $\tau_0$ ). We shall let  $N$  be the generic notation for an upper bound; the number  $N$  will then not be the

same in each estimate, though it will of course be possible to determine its size at any stage. The expression  $\varrho I$  appearing in (16) has the following estimate, valid for  $0 \leq t \leq \tau$ :

$$\begin{aligned} |\varrho I| &= |\varrho \varrho' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{\varrho} + \varrho^2 \varrho' \operatorname{div} \mathbf{v}' + \varrho \varrho'^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}| \\ &\leq N(\varrho'^2 + v'^2) + \varepsilon \Theta'^2 \end{aligned} \quad (\Theta \equiv \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

Here the basic tool is CAUCHY's inequality  $2ab \leq a^2 + b^2$ , and  $\varepsilon$  is an arbitrary positive number to be fixed later;  $N$  depends on  $\varepsilon$  and on bounds for the magnitude of  $(\mathbf{v}, \varrho, T)$ ,  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varrho}, \tilde{T})$  and their derivatives during the time interval  $0 \leq t \leq \tau$ . In addition, because of the boundary conditions the term  $\varrho U \varrho'^2$  in (16) is  $\geq 0$ . Inserting these estimates into (16) yields the inequality

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} \leq \int N(\varrho'^2 + v'^2) + \int \varepsilon \Theta'^2, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

where it is convenient to use the notation

$$\mathcal{J} = \int \frac{1}{2} \varrho \varrho'^2, \quad \mathcal{K} = \int \frac{1}{2} \varrho v'^2, \quad \mathcal{L} = \int \frac{1}{2} \varrho T'^2.$$

In considering equation (17) it will be advantageous to write  $\mathbf{T}$  in the form  $\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{V}$ , where  $\mathbf{V}$  is the *viscosity tensor*,  $\mathbf{V} = \lambda \Theta \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$ . Then since  $\mathbf{I} : \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \Theta$ , we have

$$\mathbf{T}' : \mathbf{D}' = -p' \Theta' + \mathbf{V}' : \mathbf{D}'.$$

It is now easily verified that

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} \leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + p'^2) + \int (\varepsilon \Theta'^2 - \mathbf{V}' : \mathbf{D}'), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Turning finally to an estimate for the right hand side of (18), we see that

$$\begin{aligned} \Psi' &= \widetilde{\mathbf{T} : \mathbf{D}} - \mathbf{T} : \mathbf{D} = \mathbf{T} : \mathbf{D}' + \mathbf{T}' : \widetilde{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{T} : \mathbf{D}' + (-p' + \lambda \Theta') \widetilde{\Theta} + 2\mu \mathbf{D}' : \widetilde{\mathbf{D}}, \end{aligned} \quad (19)$$

whence for  $0 \leq t \leq \tau$ ,

$$\begin{aligned} |T' \Psi'| &= |T' \mathbf{T} : \mathbf{D}' - p' T' \widetilde{\Theta} + \lambda \Theta' T' \widetilde{\Theta} + 2\mu T' \mathbf{D}' : \widetilde{\mathbf{D}}| \\ &\leq N(T'^2 + p'^2) + \varepsilon (\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}'). \end{aligned}$$

Furthermore  $\mathbf{q}' \cdot \operatorname{grad} T' = -\kappa \operatorname{grad} T'^2 \leq 0$ , and on the boundary of  $\mathcal{V}$ , in all cases,  $\varrho U T'^2 \geq 0$  and  $T' \mathbf{q}' \cdot \mathbf{n} \geq 0$ . When the above inequalities are inserted into (18) there results

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + p'^2 + T'^2) + \int \varepsilon (\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}').$$

Adding the various estimates for the derivatives of  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{K}$ , and  $\mathcal{L}$ , and using the obvious inequality  $p'^2 \leq N(\varrho'^2 + T'^2)$ , gives easily

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}) \leq N(\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}) + \int [\varepsilon (3\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}') - \mathbf{V}' : \mathbf{D}'].$$

This completes the main estimate. It is necessary now to consider the term in braces in the last integral.

The following identity becomes obvious if the matrix  $\mathbf{D}$  is written in diagonal form,

$$3\mathbf{D}:\mathbf{D} = \Theta^2 + \Delta^2 \quad (\Delta \equiv \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_3 - d_1)^2});$$

here  $\Theta = \text{div } \mathbf{v} = \text{Trace } \mathbf{D}$ , and  $\Delta$  is the octahedral invariant defined in terms of the characteristic values  $d_1, d_2, d_3$  of  $\mathbf{D}$ . From this identity follows

$$\mathbf{V}' : \mathbf{D}' = \lambda \Theta'^2 + 2\mu \mathbf{D}' : \mathbf{D}' = \frac{1}{3} \{ (3\lambda + 2\mu) \Theta'^2 + 2\mu \Delta'^2 \},$$

and also

$$\varepsilon (3\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}') = \frac{\varepsilon}{3} (10\Theta'^2 + \Delta'^2).$$

Thus if  $\varepsilon$  is chosen small enough, we have

$$\varepsilon (3\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}') \leq \mathbf{V}' : \mathbf{D}',$$

and hence

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}) \leq N(\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

This differential inequality has the integrating factor  $e^{-Nt}$ , and the solution

$$\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L} \leq (\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L})_0 e^{Nt}, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Since the integrals  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{K}$ , and  $\mathcal{L}$  are zero when  $t=0$ , it follows that they remain zero throughout the whole time interval in question. But this forces  $v' = \varrho' = T' = 0$ , and so the two flows are identical at least until  $t=\tau$ . Finally,  $\tau$  being arbitrary, the flows are identical so long as they exist, and the theorem is completely proved.

Another consequence of the final inequality is that solutions of the initial value problem, so long as they remain uniformly bounded, depend continuously on the initial data.

#### 4. The main uniqueness theorem for inviscid fluids

We consider here the most important case  $\lambda = \mu = \nu = 0$ , and refer the reader to § 1 for a description of the problem. The principal result is the following

**Theorem 2.** *Let the equation of the state  $p = p(\varrho, S)$  be of class  $C^2$  for all values of the variables, and suppose that*

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S > 0. \quad (20)$$

*Then there can be at most one solution of the initial value problem described in § 1B. Moreover, if for some solution of this problem we have*

$$U = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - G \geq c, \quad c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S$$

*on a subset  $\mathcal{S}^*$  of the boundary, then the boundary conditions on  $\mathcal{S}^*$  are redundant with respect to the given data; that is, the conditions assigned on the remainder of the boundary, together with the given initial values, uniquely determine the solution.*

(To the author's knowledge, the only previous uniqueness theorem for compressible non-viscous fluids with equation of state  $p = p(\varrho, S)$  is that given by COURANT & FRIEDRICHs ([1], pp. 82–84 and pp. 48–53, 70–75). There is a

large body of literature concerning hyperbolic systems of equations in more than two variables [5], but this work does not seem to have immediate application to our problem.)

Before commencing the proof of Theorem 2, there are several points of related interest which we wish to discuss.

To begin with, the second part of the theorem includes as a special case the result that initial values over a region  $\mathcal{R}$  uniquely determine the flow (assumed continuously differentiable) throughout a certain "hypercone" in  $(x, y, z, t)$  space with its base on  $\mathcal{R}$ . If for geometric clarity we consider the motion to take place in two spatial dimensions, then this conical *domain of determination* will appear as in Fig. 1. In order to determine the exact shape of the cone it is necessary to know one solution of the initial value problem; the lateral boundary, or

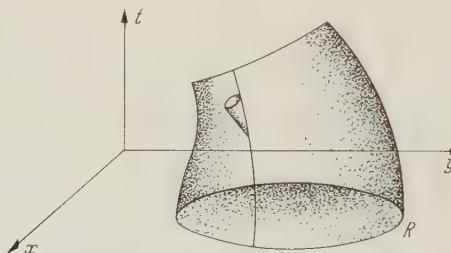


Fig. 1. Domain of determinacy for the region  $\mathcal{R}$  (two spatial dimensions)

mantle, of the cone is then characterized by the condition that  $U=c$  at each of its regular points<sup>5</sup>. In view of the independent importance of this result, we shall restate it in the following precise form.

**Corollary.** Consider a solution (with continuous first derivatives) of equations (6)–(8) in a region  $\mathcal{R}^*$  of  $(x, y, z, t)$  space bounded by the plane  $t=0$  and a mantle  $\mathcal{S}^*$  on which  $U \geq c$ . Suppose another solution with continuous first derivatives is given in  $\mathcal{R}^*$  which assumes for  $t=0$  the same values as the first one. Then the two solutions are identical in  $\mathcal{R}^*$ .

Another point which should be made in connection with Theorem 2 is that the given initial value problem may easily have no solutions at all, or only solutions which break down after a finite length of time. This occurs most obviously if we simply allow the boundary to penetrate the initial value cone  $\mathcal{R}^*$ , but it may also occur even when the boundary conditions appear quite innocuous, as has been shown by LUDFORD in a very interesting paper.

<sup>5</sup> The equation  $U=c$  specifies a *Monge cone* at each point of  $(x, y, z, t)$  space where the solution is known. The determination of the lateral boundary thus involves solving a first order partial differential equation; the mantle is then the inner envelope of the family of *Monge conoids* whose vertices lie on the boundary of  $R$ . Since the relation  $U=c$  can be shown to be a characteristic condition of equations (6)–(8), it follows that the lateral boundary is a characteristic manifold of the solution (*cf.* [2], pp. 374–376 (plane flow), [12], pp. 112–114, or [15], § 51; in the last named reference the characteristic condition is derived in exactly the form used here).

The Monge cone noted above has obvious affinities with the Mach cone in  $(x, y, z)$  space. Indeed the latter is just the projection of the Monge cone; this projection is real if and only if the flow is supersonic at the point in question.

The fact that initial values uniquely determine the subsequent flow throughout a portion of the flow field, and the fact that other solutions break down after a finite time, arises, of course, because we are considering continuous solutions of a hyperbolic system. If we allow solutions with shock waves, then the initial values no longer dictate the subsequent motion, and the breakdown of a continuous solution no longer disqualifies the future motion from consideration. For this reason, it may be conjectured that the first statement of Theorem 2 remains true for flows with shock waves. The work of LAX, OLEJNIK, and LADYSHENSKAYA (see reference [11] and the accompanying bibliography) may provide the clue to a deeper understanding of the situation.

### 5. Proof of Theorem 2

Let  $(\mathbf{v}, \varrho, S)$  and  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varrho}, \tilde{S})$  be two solutions of the initial value problem under discussion. Also, let  $\mathcal{S}^*$  denote the (possibly empty) set of boundary points where the basic solution  $(\mathbf{v}, \varrho, S)$  satisfies  $U \geq c$ . In order to prove Theorem 2, it must be shown that the two solutions are identical, and this must be done without recourse to the assigned boundary conditions on the set  $\mathcal{S}^*$ .

Retaining the notation introduced in the proof of Theorem 1, and applying the methods developed there, it is clear that from equation (7) follows

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho v'^2 = - \int [\varrho' \mathbf{v}' \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{f}) + \varrho \mathbf{v}' \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} p'] - \oint \frac{1}{2} \varrho U v'^2 \quad (21)$$

(this should be compared with the analogous equation (17); note that the boundary term in (21) cannot be assumed to vanish). The energy equation  $dS/dt = 0$  likewise yields

$$\frac{dS'}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{S} = 0 \quad (22)$$

and

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho S'^2 = - \int \varrho S' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{S} - \oint \frac{1}{2} \varrho U S'^2. \quad (23)$$

Now let  $0 \leq t \leq \tau$  be an arbitrary time interval throughout which both solutions  $(\mathbf{v}, \varrho, S)$  and  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varrho}, \tilde{S})$  exist, and let  $N$  be the generic notation for an upper bound. Then we have the following estimates valid for  $0 \leq t \leq \tau$ :

$$\begin{aligned} |\varrho' \mathbf{v}' \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{f})| &\leq N(\varrho'^2 + v'^2), & |\varrho \mathbf{v}' \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}'| &\leq N v'^2, \\ \text{and } |\varrho S' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{S}| &\leq N(v'^2 + S'^2); \end{aligned} \quad (24)$$

here  $N$  depends on bounds for the magnitude of  $(\mathbf{v}, \varrho, S)$ ,  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varrho}, \tilde{S})$  and their derivatives during the time interval  $0 \leq t \leq \tau$ .

The remaining term in (21), namely  $\mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} p'$ , requires a separate treatment. The algebraic effort in this estimate can be greatly reduced by agreeing that an equality sign with a dot placed over it means *equality modulo terms which contain products and squares of the quantities  $\mathbf{v}', \varrho',$  and  $S'$* . Since such terms can be majorized by inequalities of the form (24), it is clear that this procedure retains at each stage the essential quantities. In any case, setting

$$A = \left( \frac{\partial \varrho}{\partial S} \right)_e$$

we have  $\mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} p' \doteq \mathbf{v}' \cdot (c^2 \operatorname{grad} \varrho' + A \operatorname{grad} S')$

$$\begin{aligned} &= -(c^2 \varrho' + A S') \operatorname{div} \mathbf{v}' + \operatorname{div}(c^2 \varrho' + A S') \mathbf{v}' \\ &\doteq \frac{1}{\varrho} (c^2 \varrho' + A S') \frac{d \varrho'}{dt} + \operatorname{div}(c^2 \varrho' + A S') \mathbf{v}', \end{aligned} \quad (25)$$

where the final step is a consequence of equation (15). Now

$$\frac{1}{\varrho} c^2 \varrho' \frac{d \varrho'}{dt} \doteq \varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{2 \varrho^2} \varrho'^2 \right), \quad (26)$$

and using equation (22),

$$\frac{1}{\varrho} A S' \frac{d \varrho'}{dt} \doteq \frac{A}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho' S') \doteq \varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\varrho^2} \varrho' S' \right). \quad (27)$$

When (26) and (27) are inserted into (25) there results

$$\mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} p' \doteq \varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{2 \varrho^2} \varrho'^2 + \frac{A}{\varrho^2} \varrho' S' \right) + \operatorname{div}(c^2 \varrho' + A S') \mathbf{v}'.$$

Substituting this formula into (21) and then applying the divergence theorem, the transport equation and inequality (24) yields the inequality

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho \left( v'^2 + \frac{c^2}{\varrho^2} \varrho'^2 + \frac{2A}{\varrho^2} \varrho' S' \right) &\leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + S'^2) - \\ &- \oint \frac{1}{2} \left[ \varrho U \left( v'^2 + \frac{c^2}{\varrho^2} \varrho'^2 + \frac{2A}{\varrho^2} \varrho' S' \right) + 2(c^2 \varrho' + A S') \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

this being valid for  $0 \leq t \leq \tau$ . In addition, from (23) and (24),

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho S'^2 \leq \int N(v'^2 + S'^2) - \oint \frac{1}{2} \varrho U S'^2. \quad (29)$$

Now let  $\vartheta$  be a large positive number, whose value will be fixed in a moment, and define quantities  $J$  and  $K$  by

$$\begin{aligned} J &\equiv v'^2 + \frac{c^2}{\varrho^2} \varrho'^2 + \frac{2A}{\varrho^2} \varrho' S' + \vartheta S'^2, \\ K &= \varrho U J + 2(c^2 \varrho' + A S') \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}, \quad \text{on } \mathcal{S}. \end{aligned}$$

We observe that  $\vartheta$  can be chosen so large that

$$J \geq v'^2 + \frac{c^2}{2 \varrho^2} (\varrho'^2 + S'^2) \geq 0 \quad (30)$$

for  $0 \leq t \leq \tau$ ; indeed, recalling that  $c > 0$ , we may take

$$\vartheta = \max_{t \leq \tau} \left( \frac{2A^2}{\varrho^2 c^2} + \frac{c^2}{2 \varrho^2} \right).$$

With this choice of  $\vartheta$ , it follows from the boundary conditions (p. 274) that  $K \geq 0$  at all points of  $\mathcal{S}$ . Even more, however,  $K \geq 0$  on the set  $\mathcal{S}^*$  irrespective of the boundary conditions. For on  $\mathcal{S}^*$  we have  $U \geq c$ , so that either

$$K \geq \varrho c J + 2v'(c^2 \varrho' + A S') = Q_1$$

or

$$K \geq \varrho c J - 2v'(c^2 \varrho' + A S') = Q_2.$$

Since both the quadratic forms  $Q$  are easily shown to be non-negative definite, the required inequality follows at once.

With the results of the preceding paragraph in mind, let us multiply inequality (29) by  $\vartheta$  and add it to (28). Since  $K \geq 0$ , the resulting boundary integral is non-negative, and we obtain

$$\frac{d}{dt} \int \varrho J \leq N(\varrho'^2 + v'^2 + S'^2);$$

therefore, with the help of (30) and the fact that  $\varrho$  and  $c$  are positive,

$$\frac{d}{dt} \int \varrho J \leq N \int \varrho J, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

It follows by integration and use of the initial conditions that  $\int \varrho J = 0$ , and then, using (30) again, that  $v' = \varrho' = S' = 0$ . This completes the proof of Theorem 2.

In the following section we shall deal with the previously excluded case of an inviscid fluid with non-zero heat conduction.

### 6. The excepted case $\lambda = \mu = 0, \kappa > 0$

The type of fluid considered in this section, having zero viscosity but positive heat conduction, is perhaps rather unlikely to occur in a physical problem. Nevertheless, the results of this section are quite interesting from a mathematical viewpoint, and will also be useful in a later part of the paper.

The differential equations for the problem are obtained by specializing (1)–(3) to the forms

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (31)$$

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \mathbf{f} - \operatorname{grad} \phi, \quad (32)$$

$$\varrho \frac{dE}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (33)$$

As in the treatment of viscous fluids, we shall consider only the equations of state  $\lambda$

$$p = p(\varrho, T), \quad E = c_v T, \quad (34)$$

where  $c_v$  is a positive constant. It will also be assumed that the pressure-density-temperature relation is twice continuously differentiable and satisfies the inequality

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_T > 0, \quad (35)$$

corresponding to a *real* isothermal speed of sound. Inequality (35), like the earlier conditions  $(\partial E / \partial T)_\varrho > 0$  and  $(\partial p / \partial \varrho)_S > 0$ , is a general attribute of all real materials. Moreover, it is always the case that

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S > \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_T, \quad (36)$$

see [15], § 30. The boundary conditions appropriate to equations (31)–(33) are as follows:

At all points of the boundary  $\mathcal{S}$ , and at all instants of time, the normal velocity component  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  is given. Furthermore

a) At all points where  $U < 0$  the complete fluid state, velocity, density, and temperature, is assigned.

b) At all points where  $U \geq 0$  the temperature is given.

c) At all points where  $U = 0$ , one of the conditions c1)–c3) listed on p. 273 is assumed.

These conditions being understood, we have the following uniqueness theorem for non-viscous, heat-conducting fluids.

**Theorem 3.** *There can be at most one solution of the initial value problem corresponding to the equations and boundary conditions described above. Moreover, if for some solution of this problem we have*

$$U = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - G \geq a, \quad a^2 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right)_T,$$

on a subset  $\mathcal{S}^*$  of the boundary, then the boundary conditions on  $\mathcal{S}^*$  are partly superfluous with respect to the given data: that is, the conditions assigned on the remainder of the boundary, together with the temperature on  $\mathcal{S}^*$  and the given initial values, uniquely determine the solution.

Exactly as in the previous section, this theorem implies the following corollary: Consider a solution (with continuous derivatives) of equations (31)–(33) in a region  $\mathcal{R}^*$  of  $(x, y, z, t)$  space bounded by the plane  $t=0$  and a mantle  $\mathcal{S}^*$  on which  $U \geq a$ . Suppose another solution with continuous derivatives is given in  $\mathcal{R}^*$ , which assumes for  $t=0$  the same values as the first one, and whose temperature agrees on  $\mathcal{S}^*$  with the temperature of the first solution. Then the two solutions are identical.

Since this situation is very much like that of the preceding section, we confine our discussion to the remark that the Monge cone for the present problem lies inside the Monge cone  $U=c$ , in virtue of (36). Thus the region  $\mathcal{R}^*$  here is “larger” than the region of determination for a non-viscous, non-heat-conducting fluid, assuming that the two can be compared at all.

*Proof of Theorem 3.* The difference between the present problem and the problem  $\mu=\lambda=\kappa=0$  lies entirely in the energy equation. Equation (21) then holds exactly as before, but in place of (23) we now must deal with

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho T'^2 = & \int \left[ \mathbf{q}' \cdot \operatorname{grad} T' - \varrho' T' \frac{dT'}{dt} - \varrho T' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \tilde{T} - T' \Phi' \right] - \\ & - \oint \left[ T' \mathbf{q}' \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \varrho U T'^2 \right], \end{aligned} \tag{37}$$

where  $\Phi \equiv \phi \operatorname{div} \mathbf{v}$  (this identity is proved in the same way as (18)). A perusal of the various terms on the right hand side of equation (21) shows that, as before, the only difficult quantity is  $\mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} \phi'$ . Using the “dot” notation to denote equality modulo squares and products of  $\mathbf{v}'$ ,  $\varrho'$ , and  $T'$ , and setting  $B = (\partial \phi / \partial T)_\varrho$ ,

we have (*cfr.* formulas (25) and (26))

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} p' &\doteq \mathbf{v}' \cdot (a^2 \operatorname{grad} \varrho' + B \operatorname{grad} T') \\ &\doteq -a^2 \varrho' \operatorname{div} \mathbf{v}' + B \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} T' + \operatorname{div} (a^2 \varrho' \mathbf{v}') \\ &\doteq \varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{a^2}{2 \varrho^2} \varrho'^2 \right) + B \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} T' + \operatorname{div} (a^2 \varrho' \mathbf{v}').\end{aligned}$$

Substituting this formula into (21), and then applying the divergence theorem, the transport equation, and the usual kind of estimates, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho \left( v'^2 + \frac{a^2}{\varrho^2} \varrho'^2 \right) &\leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + T'^2) + \int \varepsilon |\operatorname{grad} T'|^2 - \\ &- \oint \frac{1}{2} \left[ \varrho U \left( v'^2 + \frac{a^2}{\varrho^2} \varrho'^2 \right) + 2a^2 \varrho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} \right],\end{aligned}\quad (38)$$

this holding as always for  $0 \leq t \leq \tau$ .

Turning next to equation (37), one has the following identity for the term  $T' \Phi'$ :

$$\begin{aligned}T' \Phi' &= T' (\rho \operatorname{div} \mathbf{v})' = T' (\rho \operatorname{div} \mathbf{v}' + p' \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) \\ &= \operatorname{div} (\rho T' \mathbf{v}') - \rho \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} T' - T' \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} p + T' p' \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

If this formula is inserted into (37), then from the divergence theorem, the boundary conditions, and the usual kind of estimates, we get the inequality

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho T'^2 \leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + T'^2) + \int (\varepsilon - \kappa) |\operatorname{grad} T'|^2. \quad (39)$$

Now define

$$\hat{K} \equiv U(\varrho^2 v'^2 + a^2 \varrho'^2) + 2\varrho a^2 \varrho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}, \quad \text{on } \mathcal{S}.$$

Clearly  $\hat{K} \geq 0$  in virtue of the given boundary conditions. Moreover

$$\begin{aligned}|2\varrho a^2 \varrho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}| &\leq 2a |\alpha \varrho'| \cdot |\varrho \mathbf{v}'| \\ &\leq a(\varrho^2 v'^2 + a^2 \varrho'^2),\end{aligned}$$

so that  $\hat{K} \geq 0$  on  $\mathcal{S}^*$  irrespective of the boundary conditions. Adding inequalities (38) and (39), and using the fact that  $\hat{K} \geq 0$ , gives without difficulty

$$\frac{d \mathcal{M}}{dt} \leq N \mathcal{M} + \int (2\varepsilon - \kappa) |\operatorname{grad} T'|^2, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

where

$$\mathcal{M} \equiv \int \frac{1}{2} \varrho \left( v'^2 + \frac{a^2}{\varrho^2} \varrho'^2 + T'^2 \right). \quad (40)$$

Setting  $\varepsilon = \frac{1}{2} \kappa$  and solving the resulting differential inequality leads easily to the identical vanishing of  $v'$ ,  $\varrho'$ , and  $T'$ .

### 7. The excepted case $3\lambda + 2\mu = 0$

As we have already remarked, Theorem 1 does not apply in the important case when  $3\lambda + 2\mu = 0$ , that is, when the Stokes relation holds. However, this case is covered by the following

**Theorem 4.** Let the coefficients of viscosity and heat conduction be constants satisfying

$$\mu > 0, \quad \kappa > 0, \quad 3\lambda + 2\mu = 0,$$

and suppose also that  $(\partial p/\partial \varrho)_T > 0$ . Then there can be at most one solution of the initial value problem described in § 1A.

*Proof.* Because of the similarity between Theorem 4 and Theorems 1 and 3, we can make considerable use of formulas already developed in the preceding sections. In fact, since the only difference between equation (2) and equation (32) is that the former has an extra term  $\operatorname{div} \mathbf{V}$  on the right, we have, by applying to equation (2) the same development which led from (32) to (38),

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho (v'^2 + \frac{\alpha^2}{\varrho^2} \varrho'^2) \leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + T'^2) + \int \varepsilon |\operatorname{grad} T'|^2;$$

in this inequality, the boundary conditions and the fact that  $\mathbf{V}' : \mathbf{D}' \geqq 0$  have been employed. Besides this estimate, which takes the place of the inequality for  $d\mathcal{H}/dt$  in the proof of Theorem 1, it is necessary to find an estimate for  $\int \frac{1}{2} \varrho T'^2$  corresponding to the earlier inequality for  $d\mathcal{L}/dt$ . To this end, we observe that from (19),

$$\begin{aligned} T' \Psi' &= T' \mathbf{T} : \mathbf{D}' - p' T' \tilde{\Theta} + \lambda \Theta' T' \tilde{\Theta} + 2\mu T' \mathbf{D}' : \tilde{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{v}' \cdot \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} T' + \lambda \tilde{\Theta} \mathbf{v}' \cdot \operatorname{grad} T' + 2\mu \mathbf{v}' \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \operatorname{grad} T' \\ &\quad + \{\text{squares and products of } \mathbf{v}', p', \text{ and } T'\} + \{\text{divergence terms}\}. \end{aligned}$$

Inserting this expression for  $T' \Psi'$  into (18), and applying the divergence theorem, the boundary conditions, and the usual sort of estimates, yields

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \varrho T'^2 \leq \int N(\varrho'^2 + v'^2 + p'^2 + T'^2) + \int (\varepsilon - \kappa) |\operatorname{grad} T'|^2.$$

Now adding the two preceding inequalities, there results

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} \leq N\mathcal{M} + \int (2\varepsilon - \kappa) |\operatorname{grad} T'|^2, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

where  $\mathcal{M}$  is defined by (40). The rest of the proof is standard.

*Remarks.* In addition to the various combinations of inequalities restricting  $\lambda$ ,  $\mu$ , and  $\kappa$  which have already been treated, there are two others which deserve notice, namely

$$\mu = 0, \quad \lambda > 0, \quad \kappa \geqq 0 \tag{41}$$

and

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu = 0, \quad \kappa = 0. \tag{42}$$

Case (41) can be discussed exactly as in Theorem 1; when  $\kappa = 0$  the appropriate boundary conditions are those in § 1B, and when  $\kappa > 0$  the appropriate boundary conditions are those of § 6. The remaining case (42) does not seem to be accessible by our methods.

Cases (41) and (42) exhaust all the situations for which the constitutive equations (2)<sub>2</sub> and (3)<sub>2</sub> satisfy the thermodynamic restrictions

$$\mathbf{V} : \mathbf{D} \geqq 0, \quad \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \leqq 0. \tag{43}$$

It would be interesting to consider the initial value problem for more general constitutive equations obeying (43) or some modification of (43).

### 8. Temperature dependent viscosity and heat conduction

As mentioned in the introduction, the coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ , and  $\alpha$  are rather strongly dependent on the temperature in actual liquids and gases. For example, in the case of air

$$\mu = \frac{k T^{\frac{3}{2}}}{T + \text{const}}, \quad \text{const} \approx 200,$$

while for water  $\mu(100^\circ)/\mu(0^\circ) = 6.314^6$ . The following theorem shows that no significant qualitative changes are brought about by treating non-constant viscosity and heat conduction.

**Theorem 5.** *If the coefficients of viscosity and heat conduction in Theorem 1 are assumed to be differentiable functions of  $\varrho$  and  $T$ , satisfying*

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \alpha > 0,$$

*then the conclusion of Theorem 1 remains valid.*

*Proof.* If one repeats the steps in the proof of Theorem 1, he is led with only a few modifications (specifically, in the estimation of  $T' \Psi'$ ) to the inequality

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}) \leq N(\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}) + \int [\varepsilon(3\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}') - \mathbf{V}' : \mathbf{D}' + \mathbf{q}' \cdot \text{grad } T'].$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' : \mathbf{D}' &= (\lambda \Theta' + \lambda' \tilde{\Theta}) \Theta' + (2\mu \mathbf{D}' + 2\mu' \tilde{\mathbf{D}}) : \mathbf{D}' \\ &= \lambda \Theta'^2 + 2\mu \mathbf{D}' : \mathbf{D}' + R_1, \end{aligned}$$

where  $|R_1| \leq N(\varrho'^2 + T'^2) + \varepsilon(\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}')$ . Similarly,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' \cdot \text{grad } T' &= (-\alpha \text{grad } T' - \alpha' \text{grad } \tilde{T}) \cdot \text{grad } T' \\ &= -\alpha |\text{grad } T'|^2 + R_2, \end{aligned}$$

where  $R_2 \leq N(\varrho'^2 + T'^2) + \varepsilon |\text{grad } T'|^2$ . It is evident then (by the argument used near the end of the proof of Theorem 1) that if  $\varepsilon$  is chosen small enough,

$$\varepsilon(3\Theta'^2 + \mathbf{D}' : \mathbf{D}') - \mathbf{V}' : \mathbf{D}' + \mathbf{q}' \cdot \text{grad } T' \leq N(\varrho'^2 + T'^2).$$

Thus we have

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}) \leq N(\mathcal{J} + \mathcal{K} + \mathcal{L}),$$

and the theorem follows at once.

Note: The above research was supported in part by the United States Air Force Office of Scientific Research under Contract No. AF 49 (638)-262.

<sup>6</sup> Water, being an incompressible fluid insofar as its usual hydrodynamic properties are concerned, does not properly come within the scope of this paper. Nevertheless, by slight modifications Theorem 5 can be shown to hold also for incompressible fluids.

### References

- [1] COURANT, R., & K. FRIEDRICHHS: Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience 1948.
- [2] COURANT, R., & D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2. Berlin: Springer 1936.
- [3] DOLIDZE, D. E.: Doklady Akademii Nauk SSSR. **96**, 437–439 (1954).
- [4] FOÁ, E.: Sull'impiego dell'analisi dimensionale nello studio del moto turbolento. L'industria (Milano) **43**, 426–429 (1929).
- [5] FRIEDRICHHS, K.: Symmetric hyperbolic linear differential equations. Communications on Pure and Applied Math. **7**, 345–392 (1954).
- [6] FRIEDRICHHS, K., & H. LEWY: Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Math. Annalen **98**, 192–204 (1927).
- [7] GRAFFI, D.: Il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi compressibili. J. Rational Mechanics and Analysis **2**, 99–106 (1953).
- [8] GRAFFI, D.: Il teorema di unicità per i fluidi incompressibili, perfetti, eterogenei. Revista de la Unión Matemática Argentina **17**, 73–77 (1956).
- [9] HADAMARD, J.: Sur l'intégrale résiduelle. Bull. Société Mathématique de France **28**, 69–90 (1900).
- [10] KISELEV, A. A., & O. A. LADYSHENSKAYA: On the existence and uniqueness of solutions of the initial value problem for viscous incompressible fluids. Izvestia Akademii Nauk SSSR. **21**, 655–680 (1957).
- [11] LAX, P.: Hyperbolic systems of conservation laws II. Communications on Pure and Applied Math. **10**, 537–566 (1957).
- [12] MISES, R. v.: Mathematical theory of compressible fluid flow. New York: Academic Press 1958.
- [13] ORR, W. McF.: The stability or instability of the steady motions of a liquid. Part II. A viscous liquid. Proc. Royal Irish Academy (A) **27**, 69–138 (1907).
- [14] REYNOLDS, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Philosophical Transactions Royal Society of London (A) **186**, 123–164 (1895).
- [15] SERRIN, J.: Mathematical principles of classical fluid mechanics. Handbuch der Physik, Bd. 8. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer. In press.
- [16] TRUESDELL, C.: The Kinematics of Vorticity. Indiana Univ. Press 1954.
- [17] ZAREMBA, S.: Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei (5) **24**, 904–908 (1915).

University of Minnesota  
Minneapolis, Minnesota

(Received March 6, 1959)

# EDITORIAL BOARD

S. BERGMAN

Applied Mathematics and Statistics Laboratory  
Stanford University, California

R. BERKER

Technical University  
Istanbul

L. CESARI

Research Institute for Advanced Study  
Baltimore, Maryland

L. COLLATZ

Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Hamburg

A. ERDÉLYI

California Institute of Technology  
Pasadena, California

J. L. ERICKSEN

The Johns Hopkins University  
Baltimore, Maryland

G. FICHERA

Istituto Matematico  
Università di Roma

R. FINN

Stanford University  
California

IRMGARD FLÜGGE-LOTZ

Stanford University  
California

HILDA GEIRINGER

Harvard University  
Cambridge, Massachusetts

H. GÖRTLER

Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Freiburg i. Br.

D. GRAFFI

Istituto Matematico „Salvatore Pincherle“  
Università di Bologna

A. E. GREEN

King's College  
Newcastle-upon-Tyne

J. HADAMARD

Institut de France  
Paris

L. HÖRMANDER

Department of Mathematics  
University of Stockholm

M. KAC

Cornell University  
Ithaca, New York

H. LEWY

University of California  
Berkeley, California

A. LICHNEROWICZ

Collège de France  
Paris

C. C. LIN

Massachusetts Institute of Technology  
Cambridge, Massachusetts

C. LOEWNER

Applied Mathematics and Statistics Laboratory  
Stanford University, California

W. MAGNUS

Institute of Mathematical Sciences  
New York University, New York City

G. C. MC VITTIE

University of Illinois Observatory  
Urbana, Illinois

J. MEIXNER

Institut für Theoretische Physik  
Technische Hochschule Aachen

C. MIRANDA

Istituto di Matematica  
Università di Napoli

C. B. MORREY

University of California  
Berkeley, California

C. MÜLLER

Mathematisches Institut  
Technische Hochschule Aachen

W. NOLL

Carnegie Institute of Technology  
Pittsburgh, Pennsylvania

A. OSTROWSKI

Certenago-Montagnola / Lugano

R. S. RIVLIN

Division of Applied Mathematics  
Brown University, Providence, Rhode Island

M. M. SCHIFFER

Stanford University  
California

J. SERRIN

Institute of Technology  
University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota

E. STERNBERG

Division of Applied Mathematics  
Brown University, Providence, Rhode Island

R. TIMMAN

Instituut voor Toegepaste Wiskunde  
Technische Hogeschool, Delft

W. TOLLMIEN

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung  
Göttingen

A. TONOLO

Seminario Matematico  
Università di Padova

R. A. TOUPIN

Naval Research Laboratory  
Washington 25, D.C.

C. TRUESDELL

801 North College Avenue  
Bloomington, Indiana

H. VILLAT

47, bd. A. Blanqui  
Paris XIII

## CONTENTS

|   |     |
|---|-----|
| IGLISCH, R., Der Resonanzbegriff bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .                                    | 179 |
| IGLISCH, R., Der Resonanzfall bei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .                                  | 187 |
| BUTZER, P. L., Singular Integral Equations of Volterra Type and the Finite Part of Divergent Integrals . . . . .                                | 194 |
| GUDERLEY, K. G., Asymptotic Representations for Differential Equations with a Regular Singular Point . . . . .                                  | 206 |
| SCHRÖDER, J., Vom Defekt ausgehende Fehlerabschätzungen bei Differentialgleichungen . . . . .   | 219 |
| STERNBERG, E., & R. MUKI, Note on the Expansion in Powers of Poisson's Ratio of Solutions in Elastostatics . . . . .                            | 229 |
| MARTENSEN, E., Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung . . . . . | 235 |
| SERRIN, J., On the Uniqueness of Compressible Fluid Motions . . . . .   | 271 |